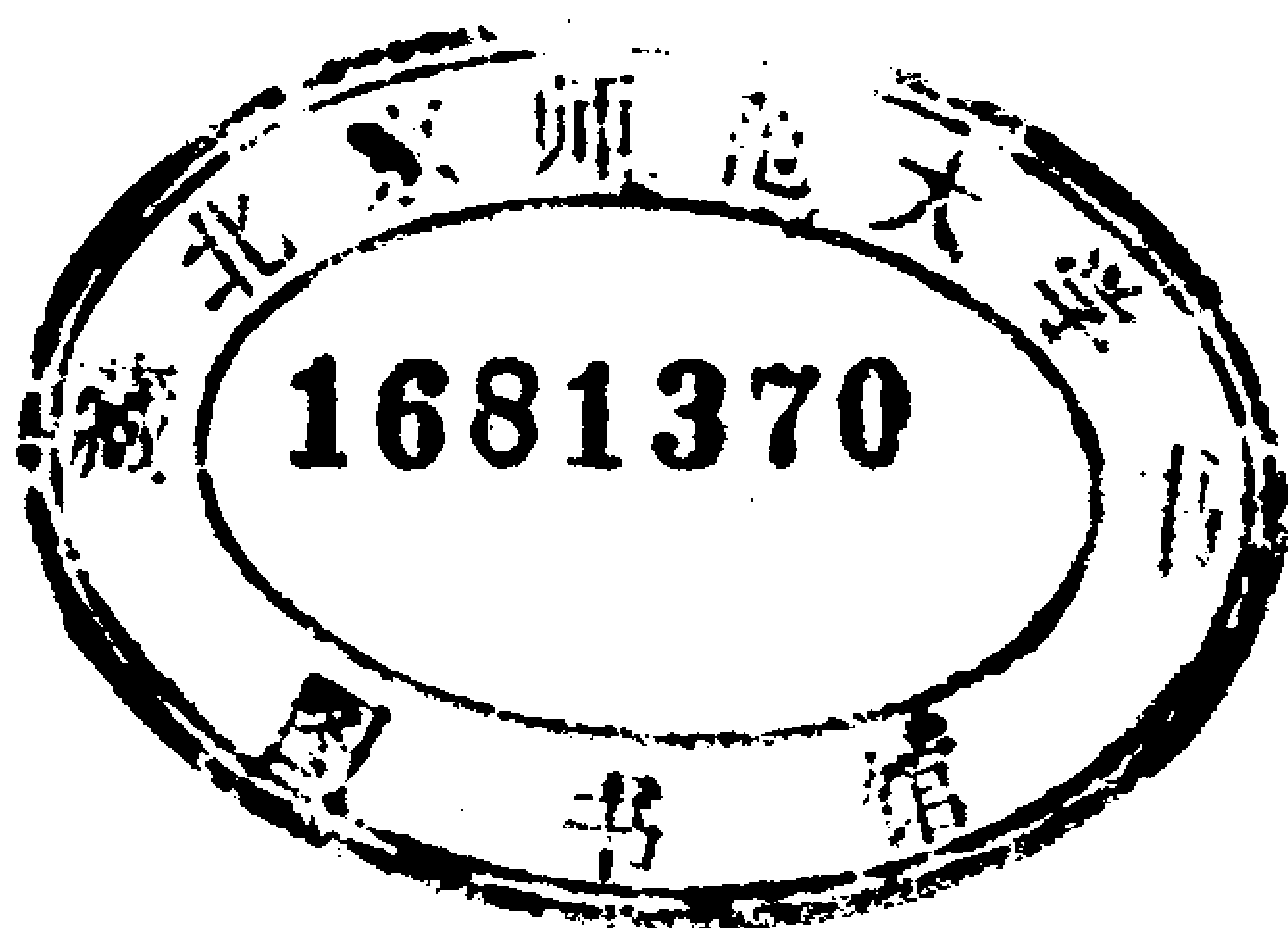
TJ11128/09

数学小丛书——智慧之花

（4）

归纳·递推·无字证明·坐标·复数

丁石孙 主编



北京大学出版社

新登字（京）159号

图书在版编目（CIP）数据

归纳·递推·无字证明·坐标·复数/丁石孙主编．—北京：北京大学出版社，1995.5
（数学小丛书——智慧之花；4）
ISBN 7-301-02621-8

Ⅰ.归… Ⅱ.丁… Ⅲ.初等数学-普及读物 Ⅳ.012-49

书　　名：归纳·递推·无字证明·坐标·复数
著作责任者：丁石孙　主编
责任编辑：刘　勇
标准书号：ISBN 7-301-02621-8/O·343
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话：出版部 2502015　发行部 2559712　编辑部 2502032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787×1092毫米　32开本　8.875印张　200千字
1995年5月第一版　1995年5月第一次印刷
印　　数：0001—4,000册
定　　价：7.50元

内 容 提 要

本书是北京大学《数学小丛书——智慧之花》的第四本。内容为精选的饶有趣味的数学问题，旨在激发中学生和大学生学习数学的兴趣，使学生得到引人入胜的思维训练。

什么是"好的数学"，什么是"不好的或不大好的数学"，著名数学大师陈省身先生对此有精辟的论述(见本书第213页)。本书选编了"无字证明集锦"，"数学归纳法"，"递归序列"，"坐标法"以及"任意次代数方程"等五篇短文作为"好的数学"的例子，而把"Napoleon，Escher与平面拼铺问题"作为"不好的数学"的例子，旨在为中学数学教学和课外活动提供一些有用的材料，在培养学生基本的数学思维能力上尽量少走弯路。"关于数学归纳原理的一点注记"一文指出了在国内外中等数学中广为流传的一个错误：数学归纳原理与最小自然数原理是等价的。为适应参加数学竞赛学生的需要，本书给出了第33届、第34届国际数学奥林匹克竞赛试题与解答。

本书可作为高中学生、中学数学教师和低年级大学生的课外读物，也可供数学爱好者阅读，本书对有志参加数学竞赛的学生也有很好的指导意义。

《数学小丛书——智慧之花》编委会

主　　编：丁石孙

副 主 编：潘承彪　李　忠

编　　委：（按姓氏笔划为序）

刘西垣　陈剑刚　陈维桓　邱淑清　周民強

徐明曜　谢衷洁

责任编辑：朱学贤　刘　勇

写在前面的话

在一个人所受的基础教育中，数学一直是占着一个特殊地位的，它占用的时间可以说是最多的。也许因为这已是历史上长期以来形成的事实，所以很少有人去作说明，即使有的学生并不喜欢数学，也鼓不起勇气去问个为什么。

数学由于其特殊的形式，给人的印象常常是：一批口诀，一堆公式以及一串定理，但它们在解决生活及其它学科的问题时又是很有用的，于是多数人就硬着头皮按老师教的学下去。这样的理解至多对了一半，因为数学还有另一个方面的重要作用，这就是通过对数学知识的介绍，对数学问题的解决，教会人们一种重要的分析问题、解决问题的思想方法。简单地讲，数学要教会人如何进行逻辑推理，如何进行正确的抽象思维，如何在纷繁的事物中抓住主要的联系，并如何使用明确的概念，等等。

要正确发挥数学课程的教育功能，除去需要教师与学生的积极努力以外，也还需要找到适当的辅助材料和恰当的方法。我们选编这套《数学小丛书——智慧之花》就是为了从这个方面为数学老师(主要是中学的老师)和大学生提供一点帮助，有一部分也可以用作中学生的课外读物。

我们并不认为目前的数学教学大纲的内容太少，太浅，因而要增加或加深教学内容。我们更不想给学生增加习题量以应付考试。恰恰相反，我们认为再向这个方向发展将会造成极大的危害，通过我们选择的这些小文章，我们希望能帮

助读者对数学有更全面的了解，使大家发现数学不只是“定义、定理、公式、证明”的刻板叙述，而是生动活泼、引人入胜的思维训练。在这里，读者可以看到如何对各种各样的问题进行精细的分析，又如何逐步把复杂的问题理出头绪，最后给出清晰的答案。总之，我们希望通过千姿百态的分析与讨论帮助读者了解什么是大家应该从数学学习中学到的思想方法。

我们的目标是这样，但能否达到还有待于实践的检验。读者读过这些书之后的印象与收获将作出评判。我们希望大家多提批评意见，帮助我们不断改进我们的工作。

丁石孙

1989年2月

出版说明

现代数学，这个最令人惊叹的智力创造，已经使人类心灵的眼光越过无限的时间，使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间。

——N.M.Butler

数学方法渗透进并支配着一切自然科学的"理论"分支。在现代经验科学中，它已越来越成为衡量成就的主要标准。

——J.von Neumann

参与开发一般智力——不是为了今后某一职业的特定需要，应看成是数学教育的基本目标。

——F.Reidt

别把数学想象得那么困难和艰涩，并认为它排斥常识，数学仅仅是常识的一种微妙的形式。

——L.Kelvin

这些著名学者的话表达了我们出版《数学小丛书——智慧之花》的想法和努力的目标。

本丛书的主要对象是：中学数学教师、数学各专业的低年级大学生、部分高中学生以及数学爱好者。所选内容力求生动、有趣，在开始阶段以翻译为主，一年2—3册。

我们希望本丛书能为活跃与推动中学与大学低年级的数学教学、提高中学教师和大学生的数学素质、更好地沟通中学数学与大学数学以及普及数学知识，做一点有益的工作。

我们水平有限，希望大家多提意见，为了让我们的小花开放得绚丽多姿而共同努力！

《数学小丛书——智慧之花》编委会

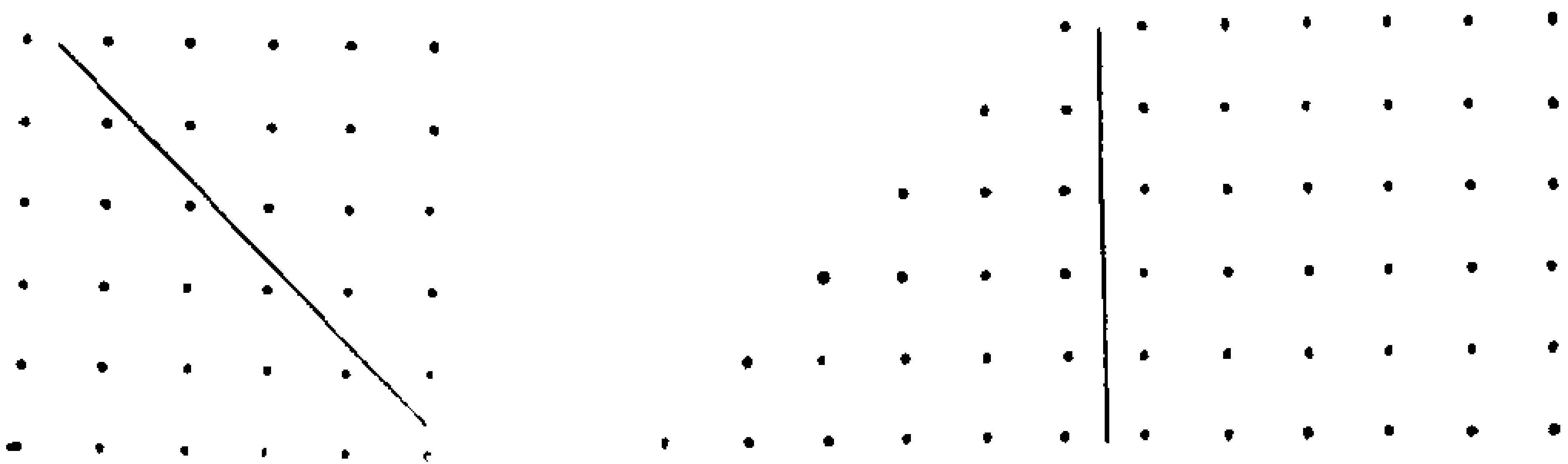
1989年2月

目　录

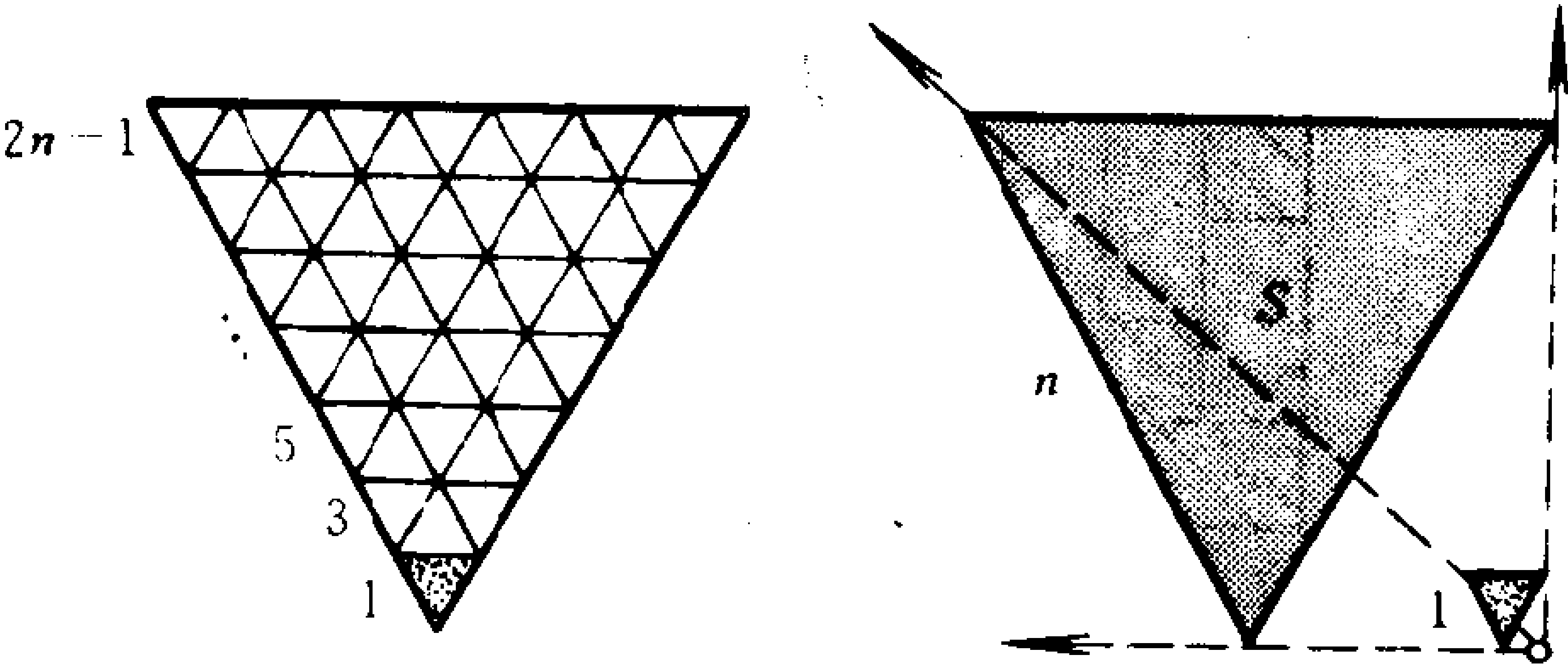
无字证明集锦

潘 承 彪 编

（一）自然数求和

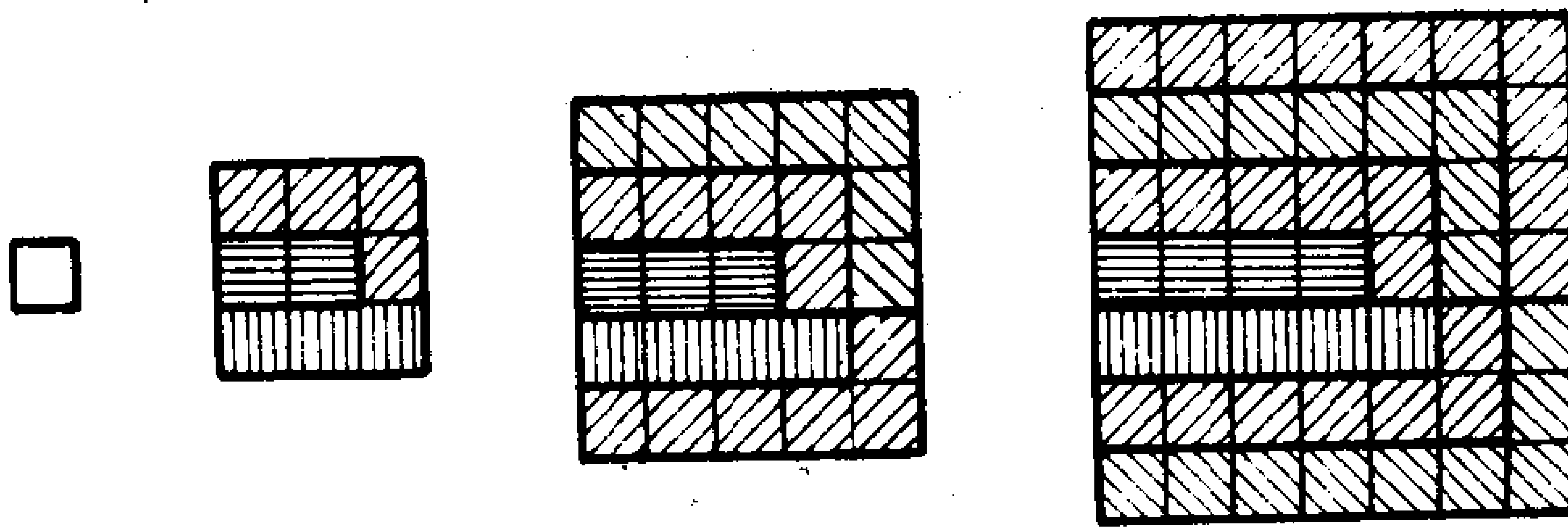


$$\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n-1}k=n^2.\qquad\qquad \sum_{k=1}^{n}k+n^2=\sum_{k=n+1}^{2n}k.$$



$$\nabla+3\cdot\nabla+\cdots+(2n-1)\cdot\nabla=S=n^2\cdot\nabla,$$

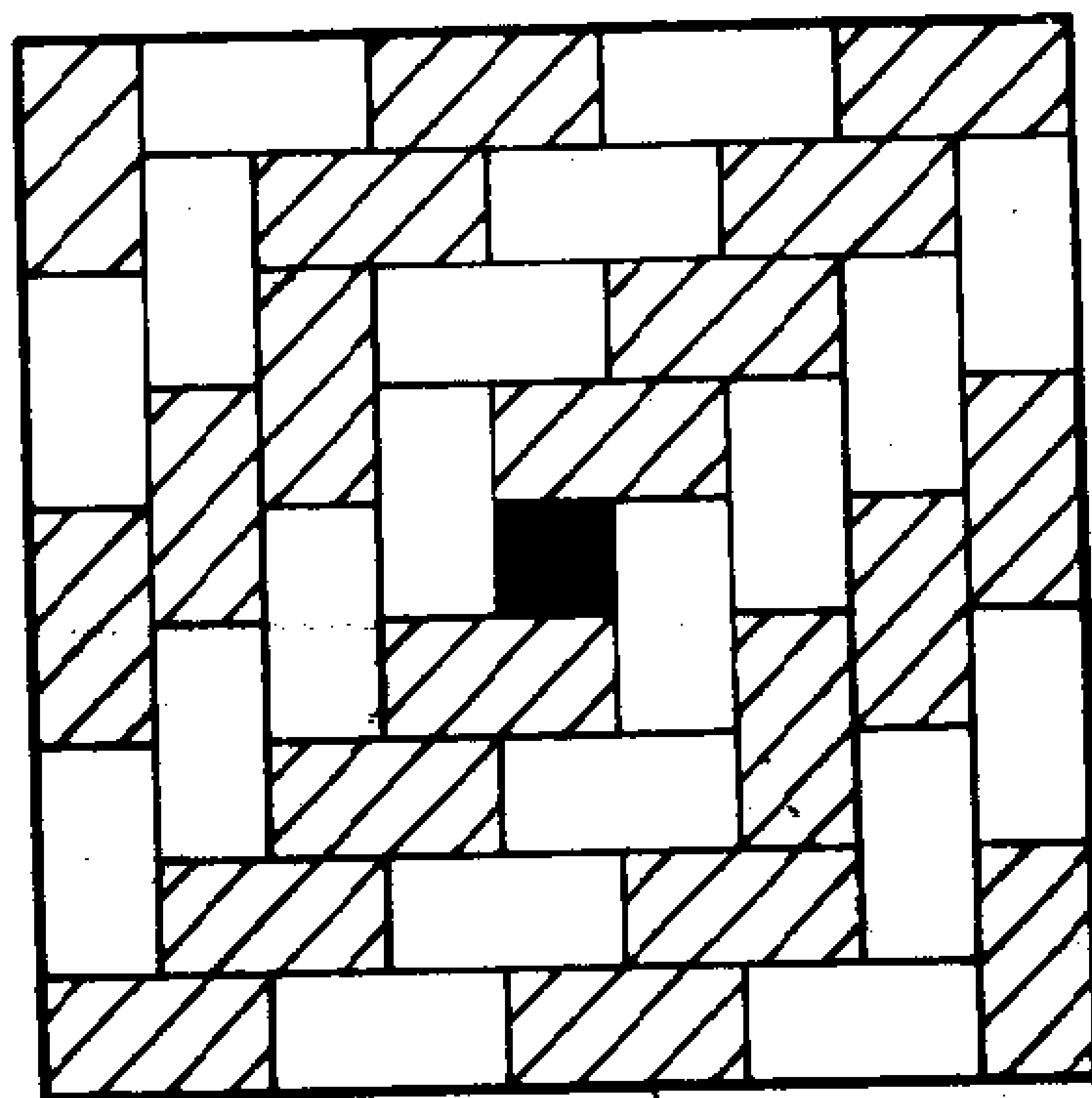
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2.$$



$n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$

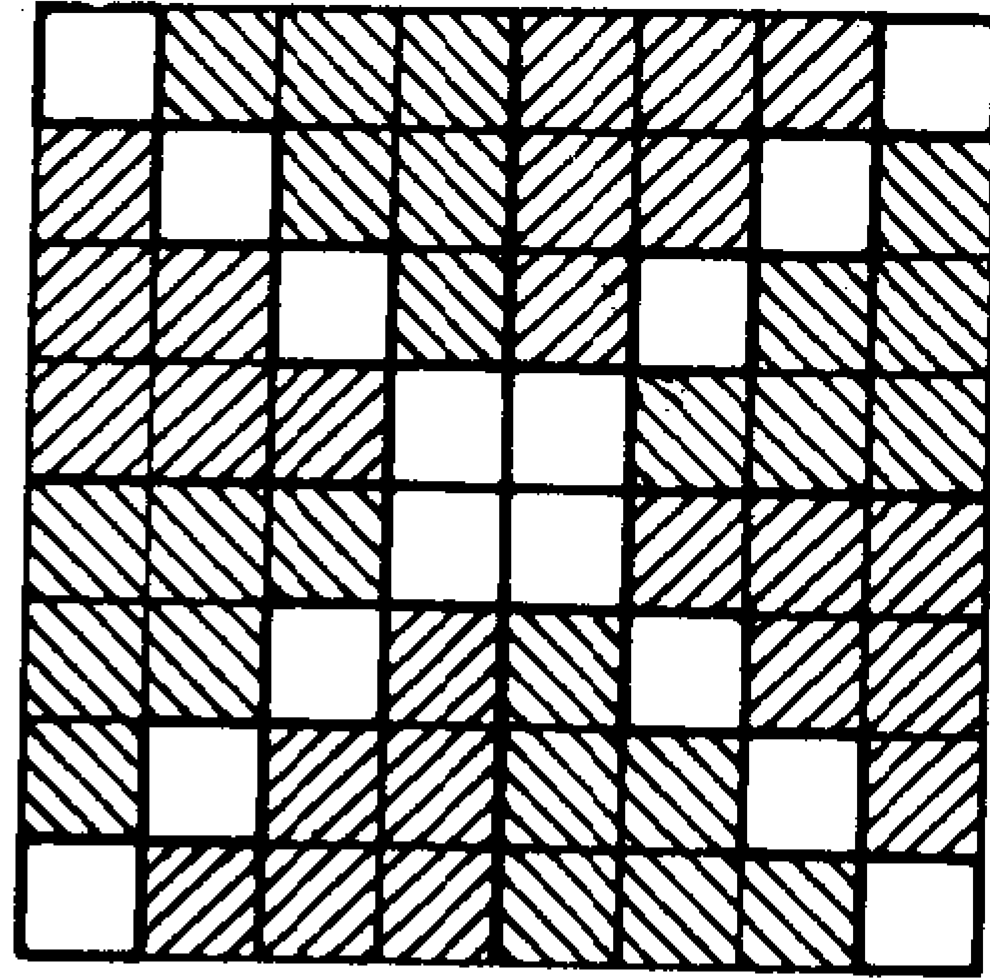
$$4+5+6+7+8+9+10 = (2\cdot 4-1)^2$$

$$\sum_{k=n}^{3n-2} k = (2n-1)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots.$$



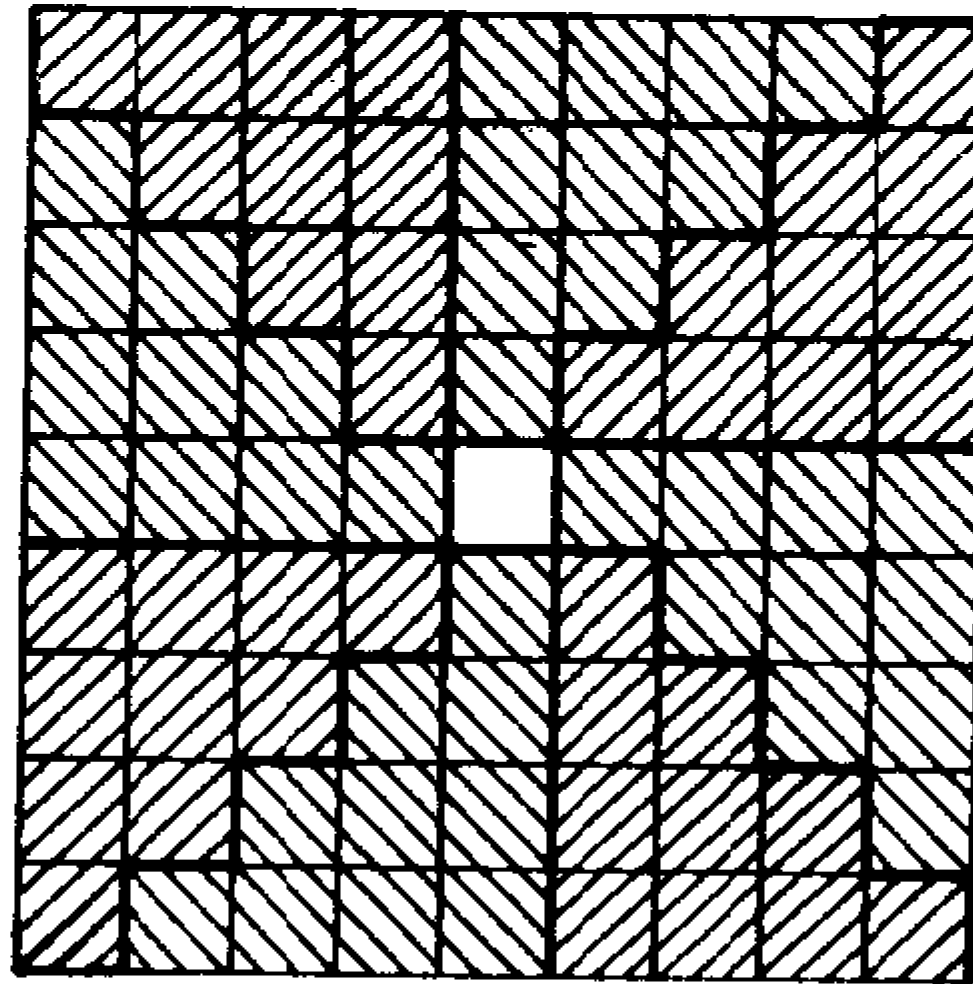
$$1 + 4\cdot 2 + 8\cdot 2 + 12\cdot 2 + 16\cdot 2 = (2\cdot 4 + 1)^2,$$

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} 4k = (2n+1)^2.$$



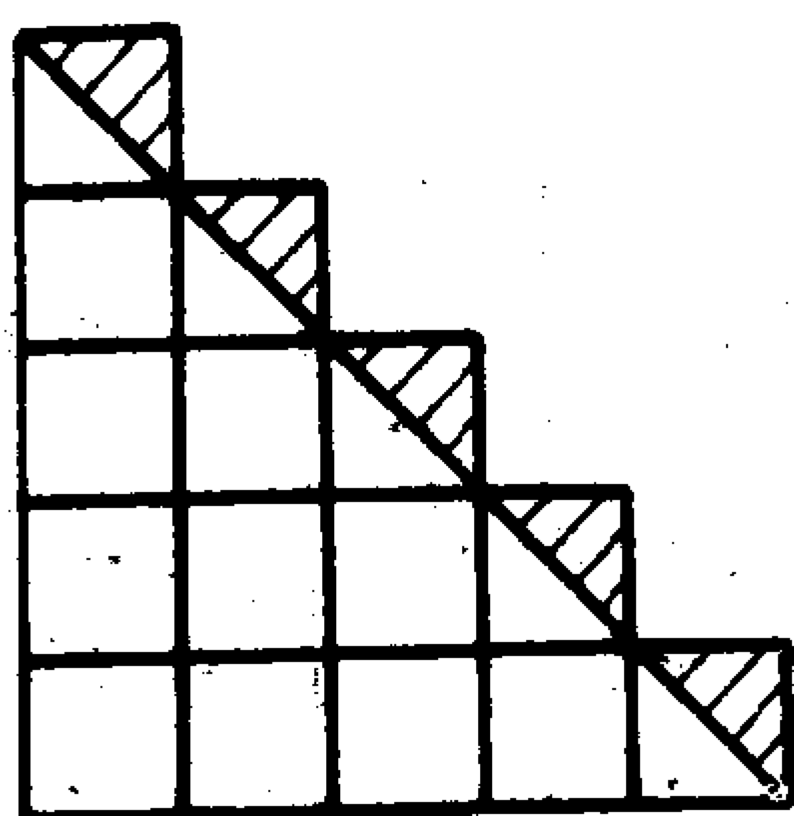
$$(2\cdot 4)^2 - 2(2\cdot 4) = 8\sum_{k=1}^{4-1} k,$$

$$(2n)^2 - 2(2n) = 8\sum_{k=1}^{n-1} k.$$



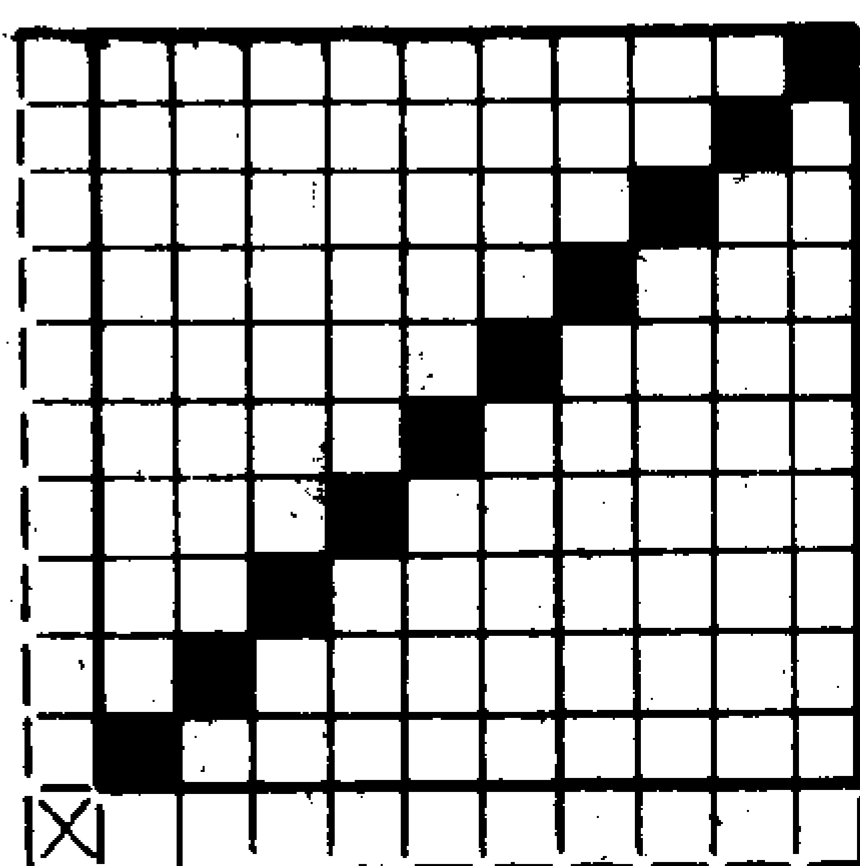
$$(2\cdot 5 - 1)^2 - 1 = 8\sum_{k=1}^{5-1} k,$$

$$(2n-1)^2 - 1 = 8\sum_{k=1}^{n-1} k.$$



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5^2}{2} + \frac{5}{2},$$

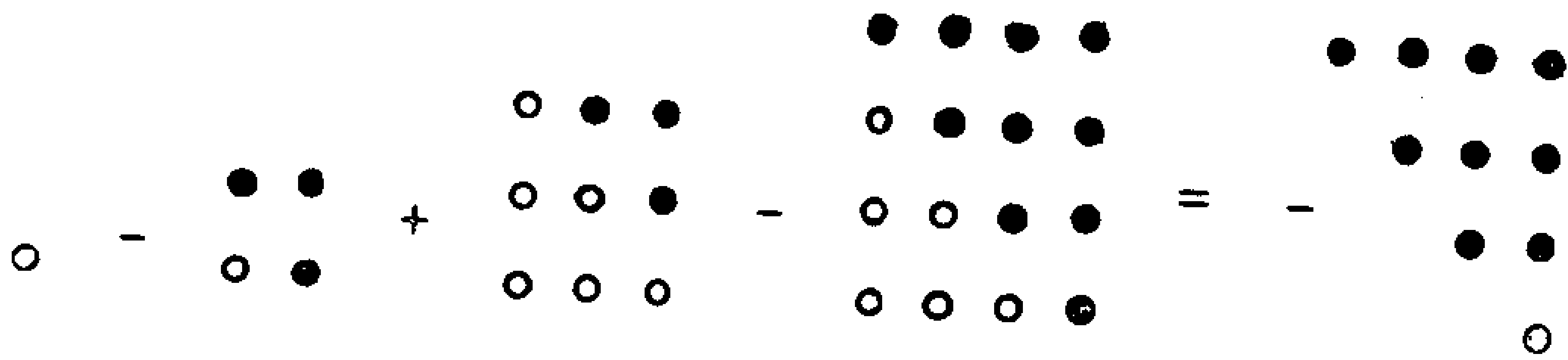
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}n(n+1).$$



$$\binom{10}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 - 1) = \sum_{k=1}^{9} k,$$

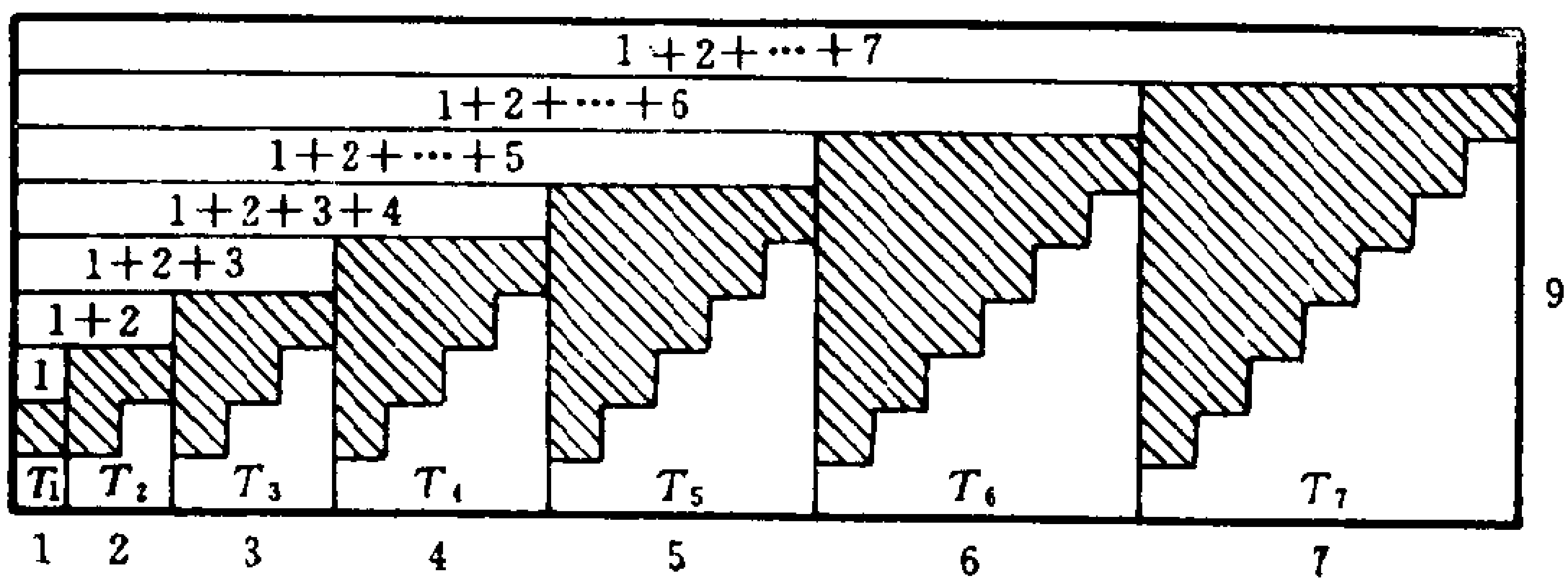
$$\binom{11}{2} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (11 - 1) = \sum_{k=1}^{10} k,$$

$$\binom{11}{2} = \binom{10}{2} + 10, \qquad \binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n.$$



$$1-2^2+3^2-4^2=-(1+2+3+4)=-\frac{4\cdot(4+1)}{2},$$

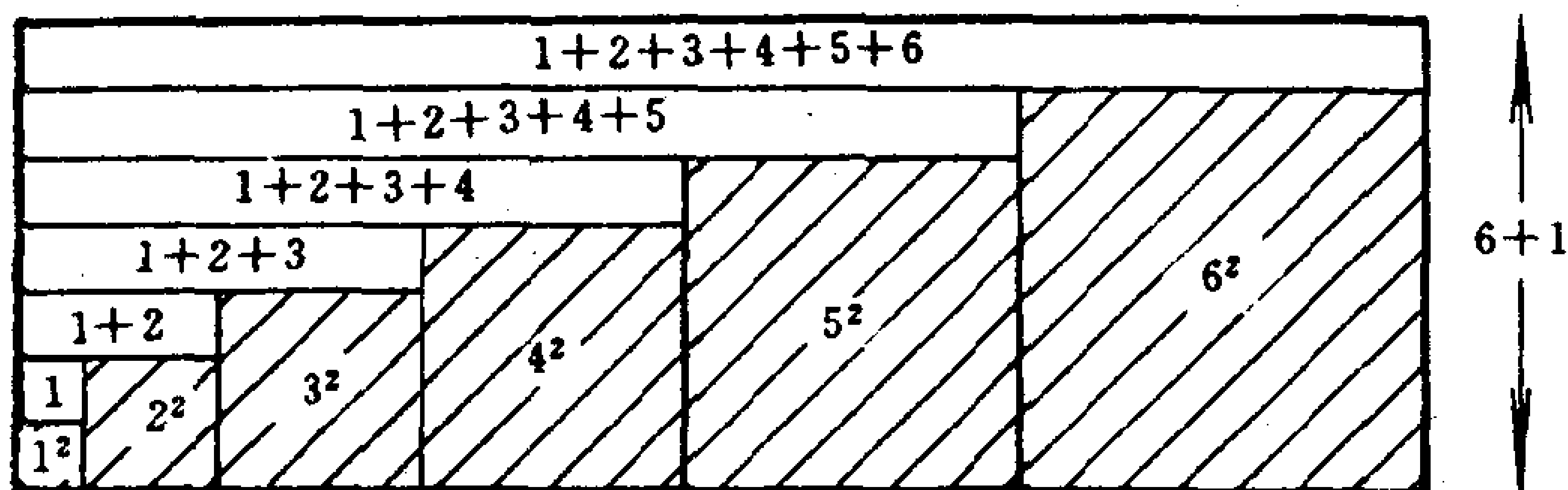
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}k=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$



$$T_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$3(T_1+T_2+\cdots+T_7)=(7+2)T_7=\frac{7\cdot(7+1)(7+2)}{2},$$

$$T_1+T_2+\cdots+T_n=\frac{(n+2)}{3}T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

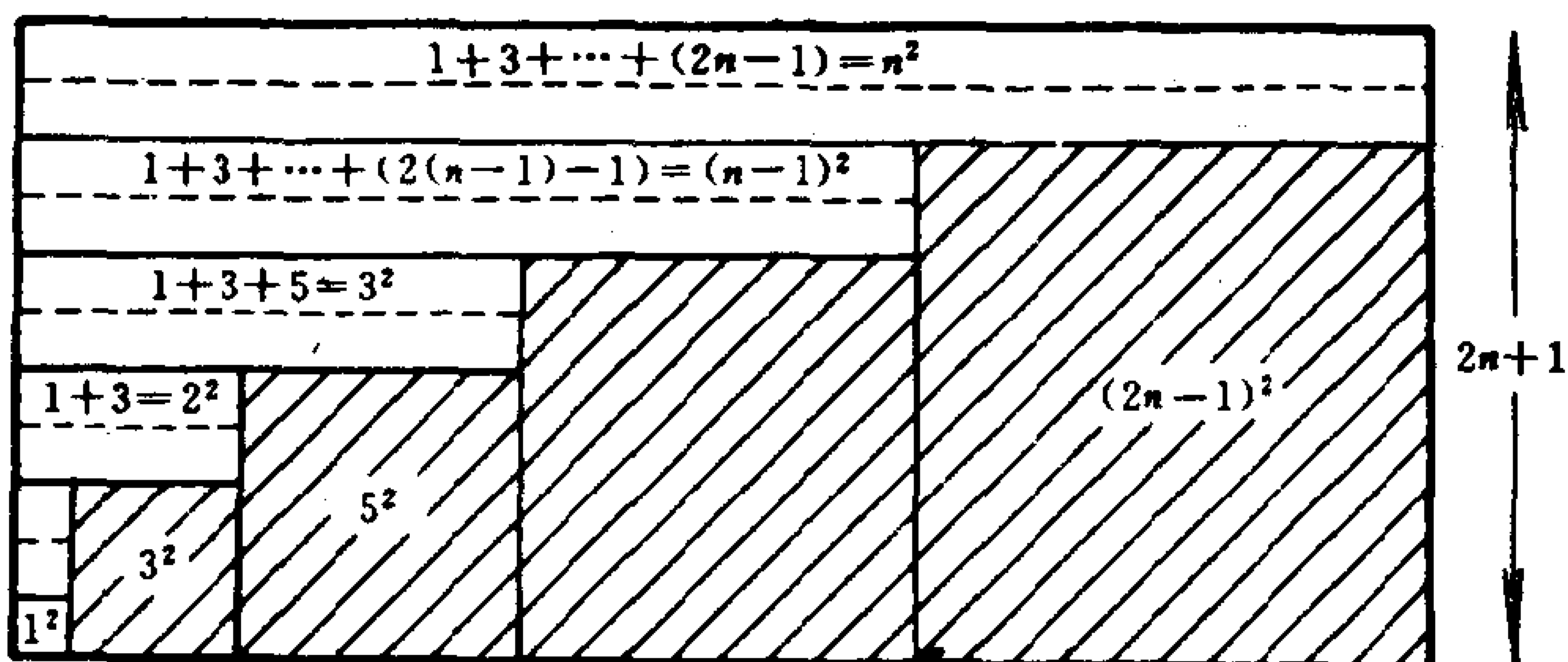


$$1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2 + (T_1 + T_2 + \cdots + T_6) = (6+1)T_6,$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2 = (6+1)T_6 - \frac{(6+2)}{3}T_6 = \frac{2\cdot 6+1}{3}T_6$$

$$= (2\cdot 6+1)(6+1)6/6,$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n+1}{3}T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

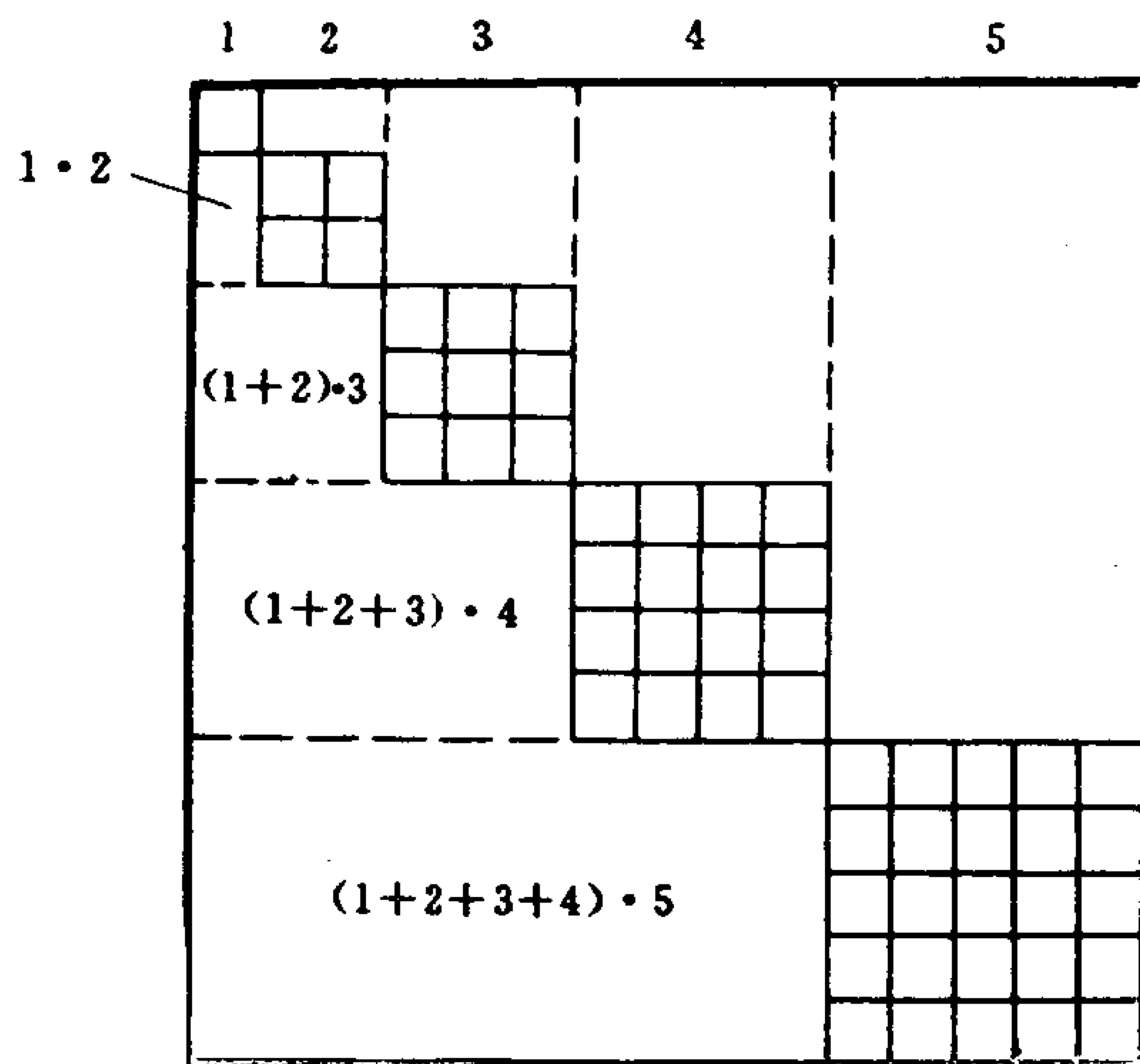


$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 + 2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

$$= n^2 \cdot (2n+1),$$

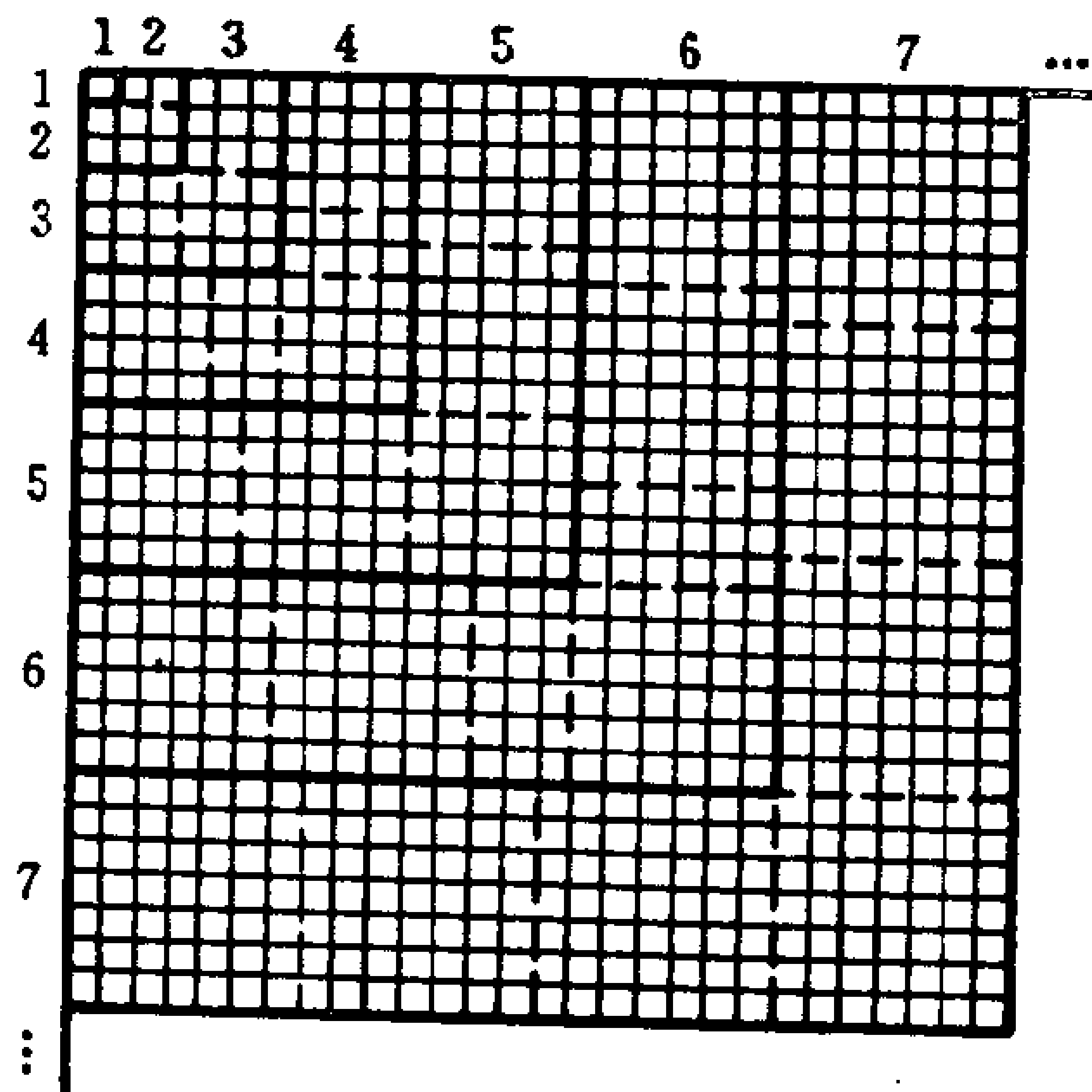
$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = n^2(2n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$



$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{4}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)(k+1)\right],$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} k\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)(k+1)\right].$$



$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2.$$

1	2	3	$\cdots$	n
2	4	6	$\cdots$	$2n$
3	6	9	$\cdots$	$3n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$2n$	$3n$	$\cdots$	n^2

1	2	3	$\cdots$	n
2	4	6	$\cdots$	$2n$
3	6	9	$\cdots$	$3n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$2n$	$3n$	$\cdots$	n^2

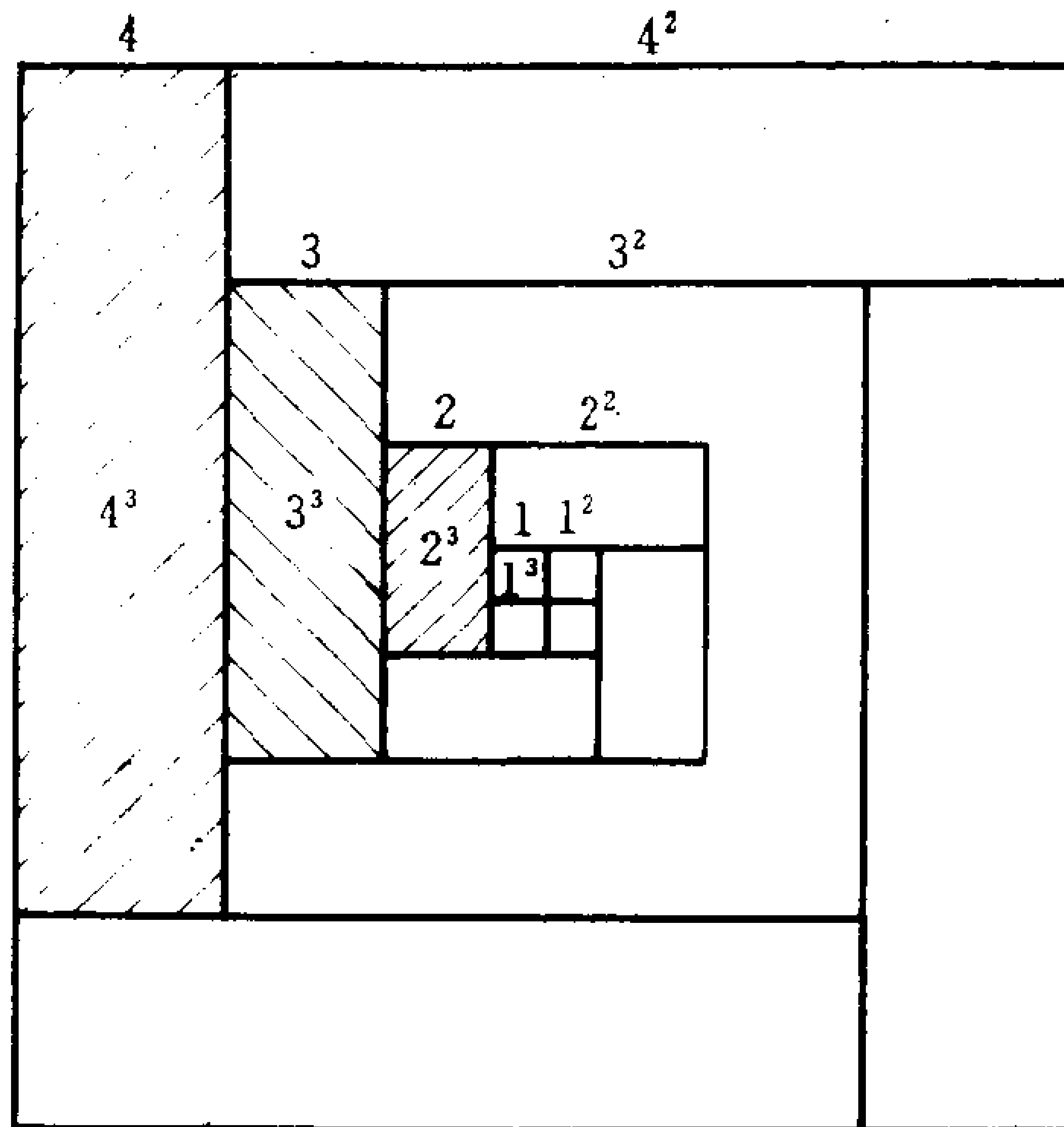
$$\sum_{i=1}^{n} i+2\sum_{i=1}^{n} i+\cdots+n\sum_{i=1}^{n} i=1^2+2(2)^2+\cdots+n(n)^2$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2. \qquad\qquad =\sum_{i=1}^{n} i^3.$$

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

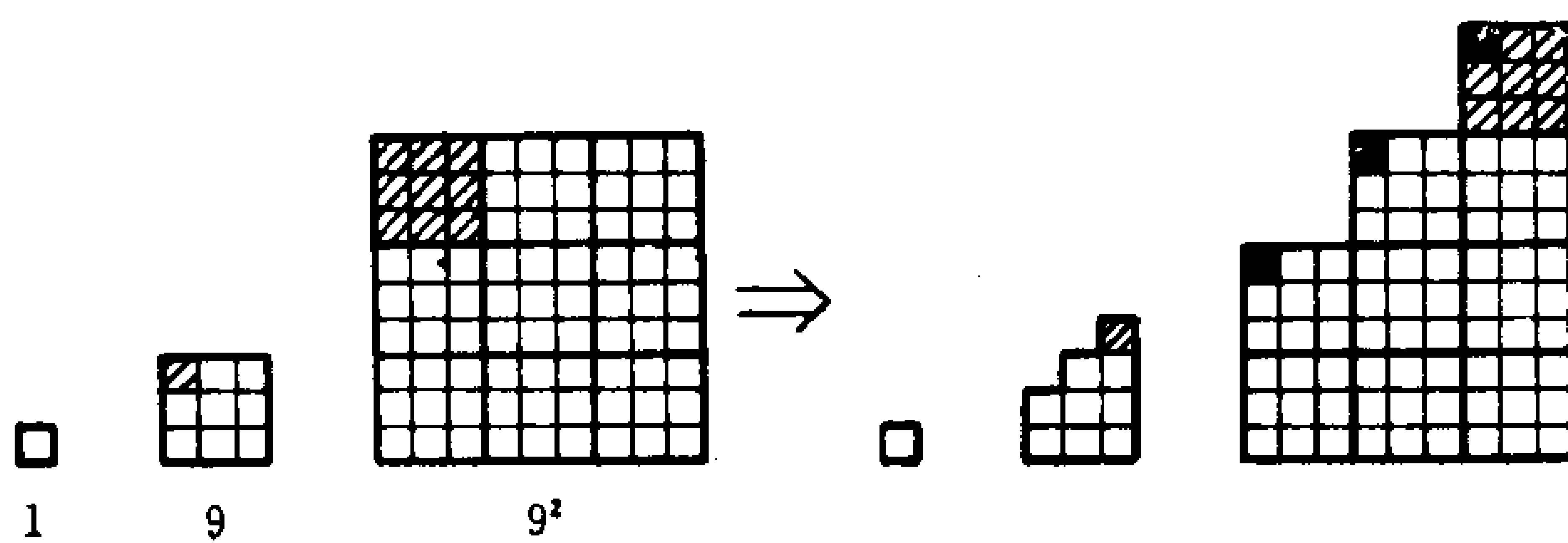
$$\left(\sum_{i=1}^{5} i\right)^2=1\cdot 1^2+2\cdot 2^2+3\cdot 3^2+4\cdot 4^2+5\cdot 5^2=\sum_{i=1}^{5} i^3,$$

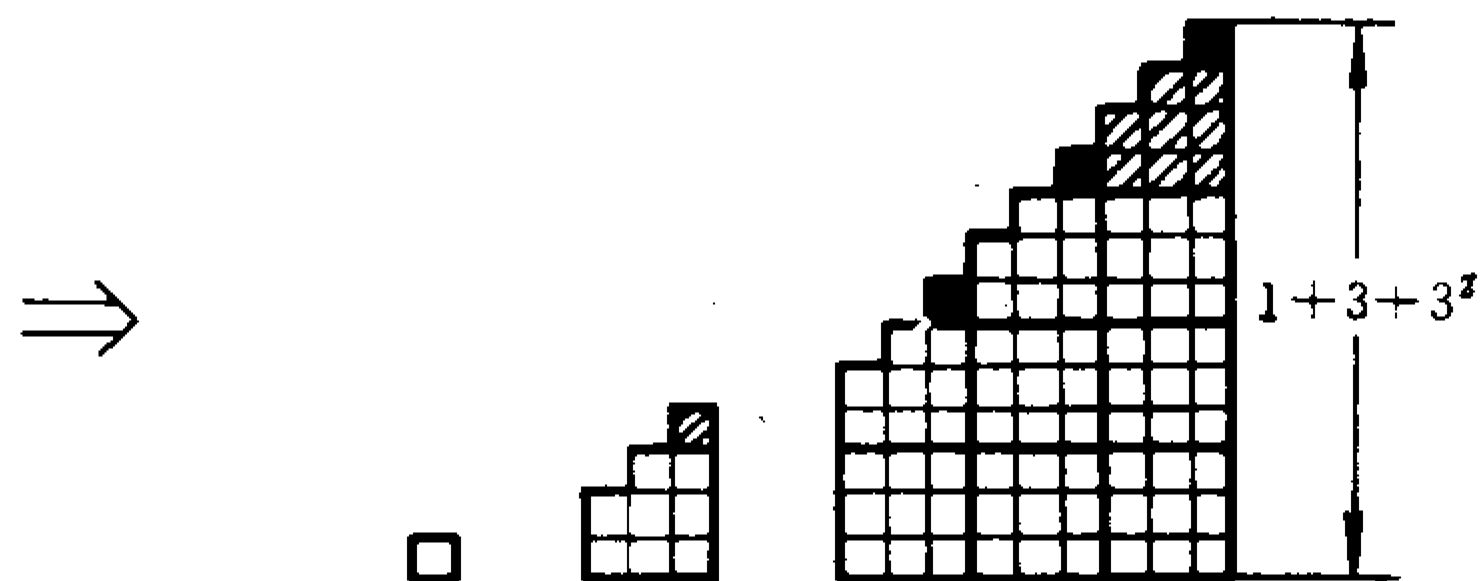
$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2=1\cdot(1)^2+2\cdot(2)^2+\cdots+n\cdot(n)^2=\sum_{i=1}^{n} i^3.$$



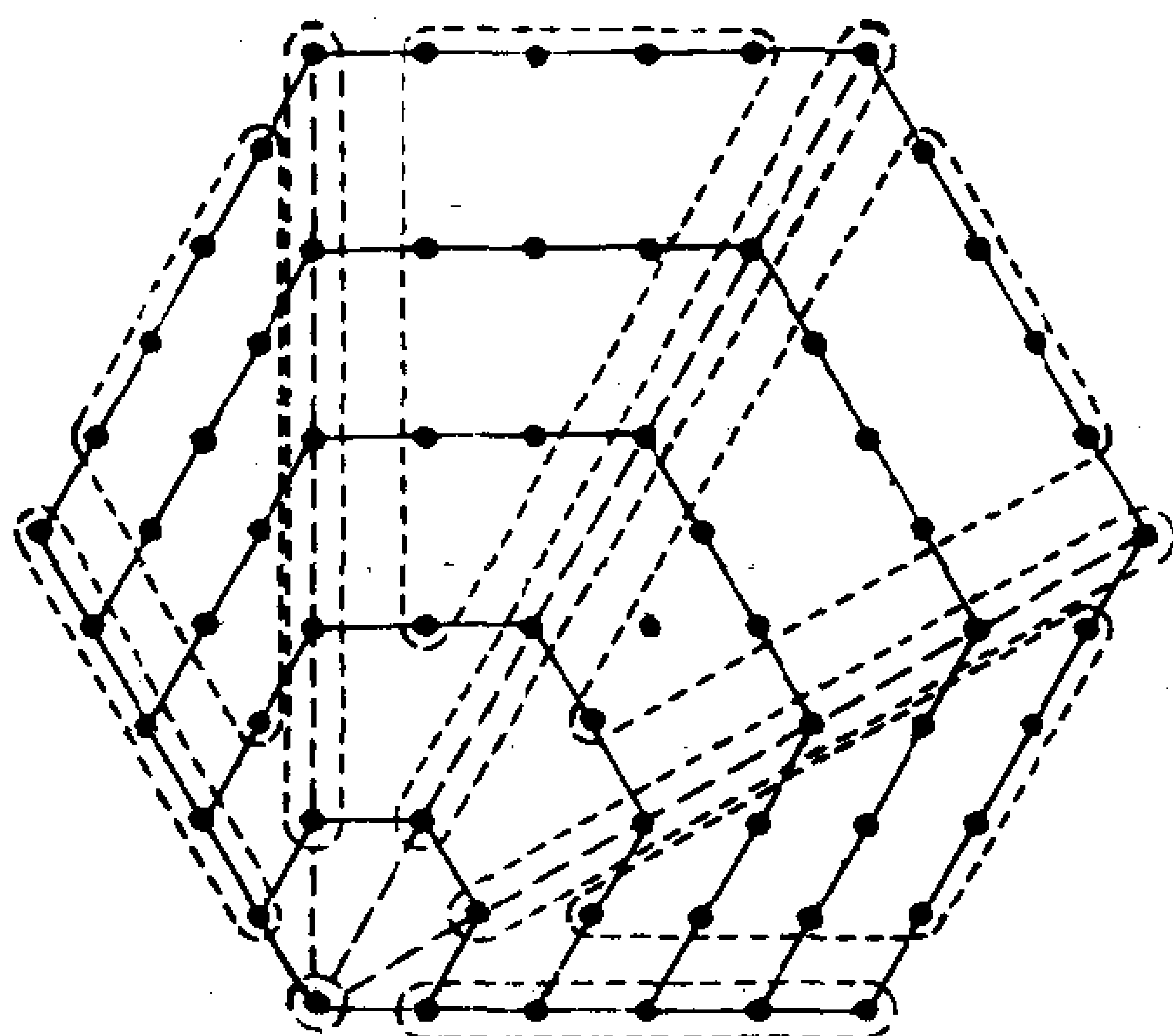
$$1^3+2^3+3^3+4^3=\frac{1}{4}(4+4^2)^2=\frac{1}{4}\{4(4+1)\}^2,$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}\{n(n+1)\}^2.$$

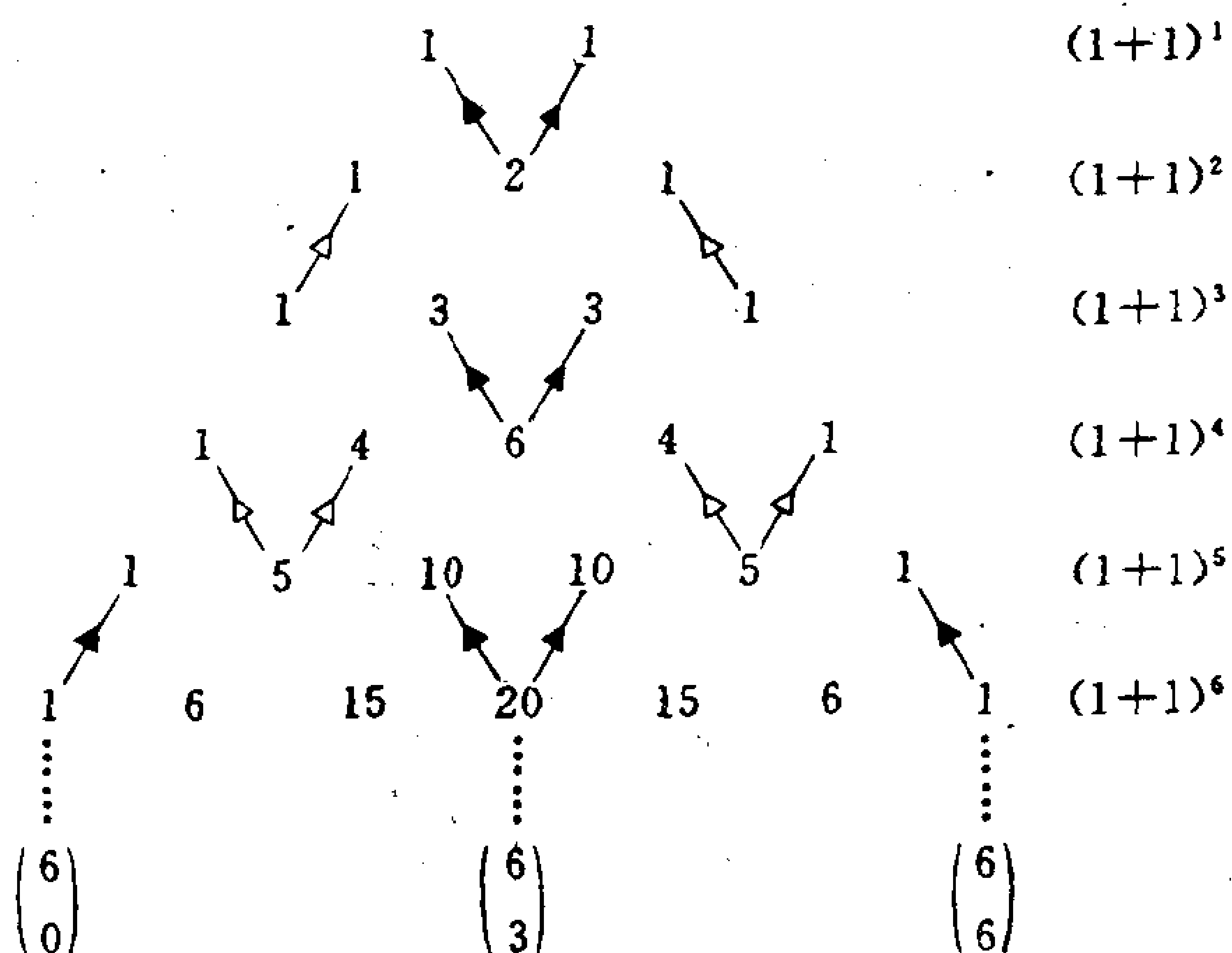




$$1+9+9^2=1+(2+3+4)+[5+6+\cdots+(1+3+3^2)],$$
$$1+9+\cdots+9^n=1+2+3+\cdots+(1+3+3^2+\cdots+3^n).$$



第六个六角数 $=1+(6-1)(6-1)+(6-2)(1+2+3+4)$,
第k个n角数 $=1+(k-1)(n-1)+(n-2)[1+2+\cdots+(k-2)]$
$=1+(k-1)(n-1)+(k-2)(k-1)(n-2)/2$.



$$\binom{6}{0}+\binom{6}{3}+\binom{6}{6}=2^5-2^4+2^3-2^2+2^1$$

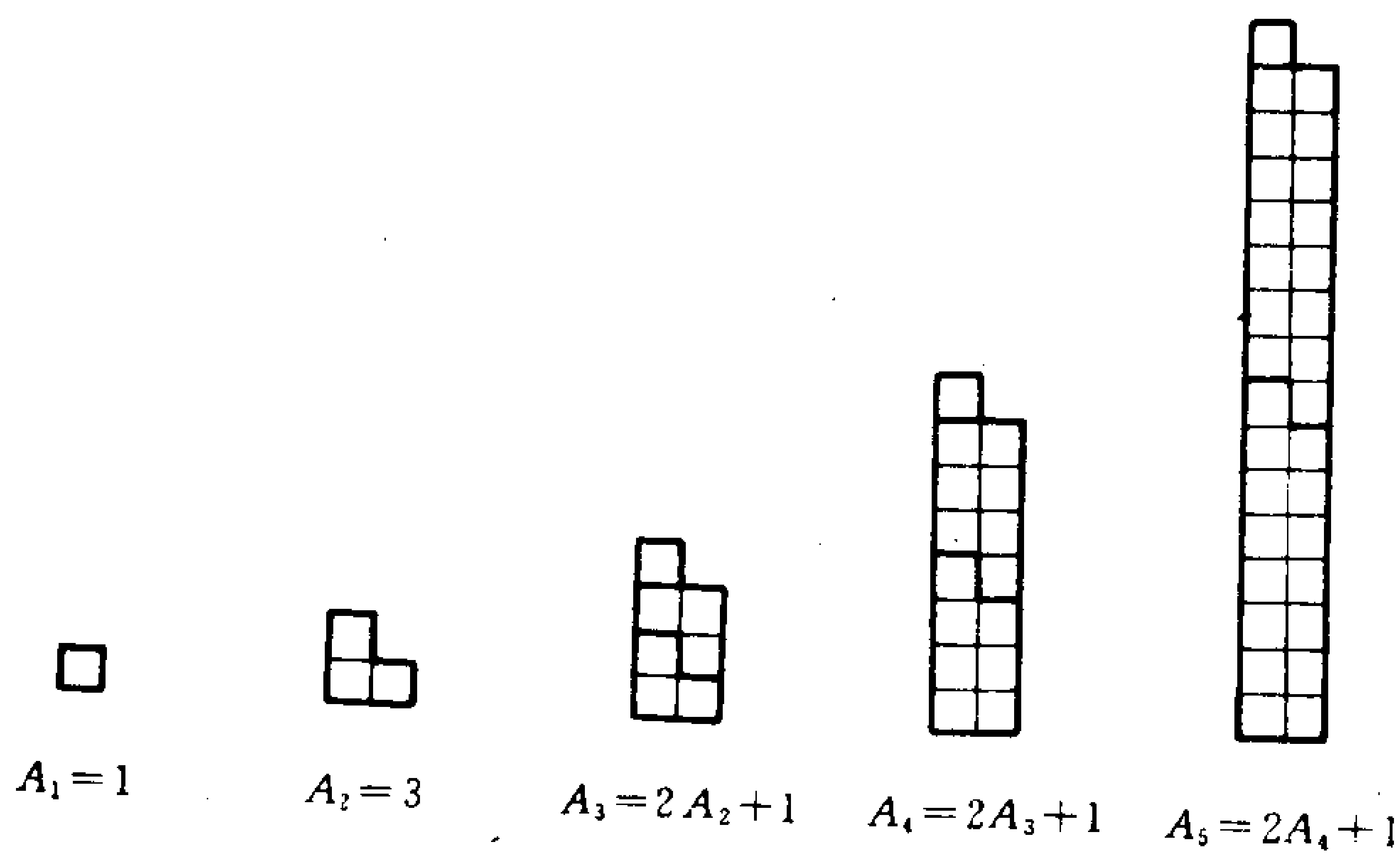
$$=\frac{1}{3}(2^6+2),$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{3n}{3j}=2^{3n-1}-2^{3n-2}+\cdots+(-1)^{j-1}2^{3n-j}$$

$$+\cdots+(-1)^{3n-2}\cdot 2$$

$$=\sum_{j=1}^{3n-1}(-1)^{j-1}2^{3n-j}$$

$$=\frac{1}{3}(2^{3n}+(-1)^n 2).$$



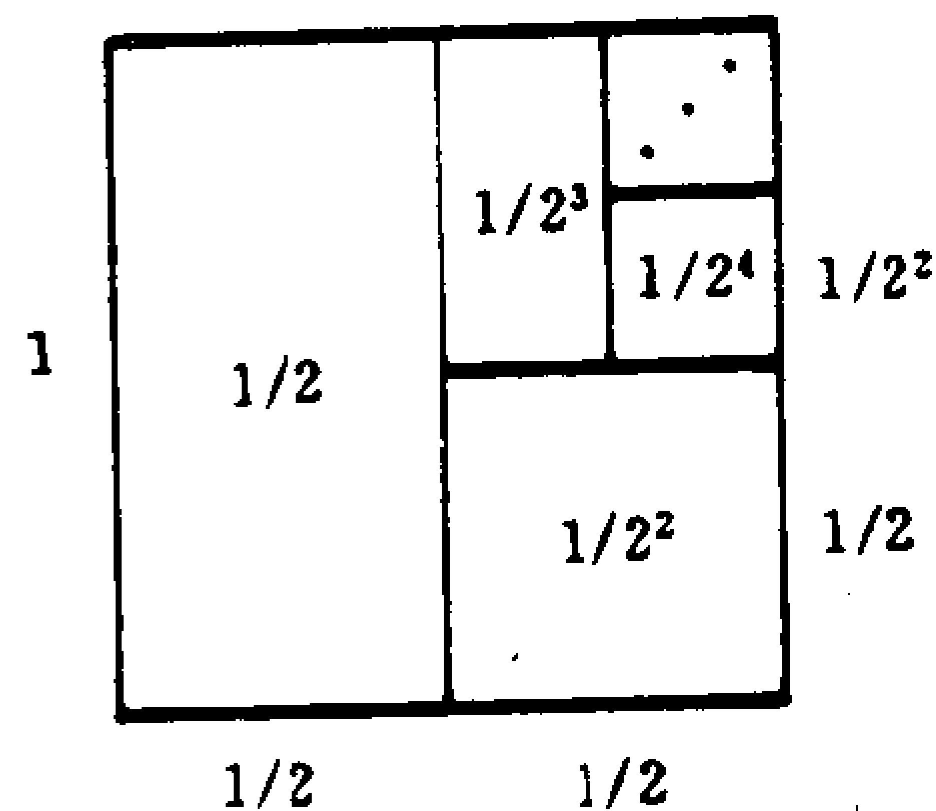
$$A_1=1,\quad A_n=2A_{n-1}+1,\qquad n\geqslant 2$$

$$\Leftrightarrow A_n=2^n-1,\qquad n\geqslant 1.$$

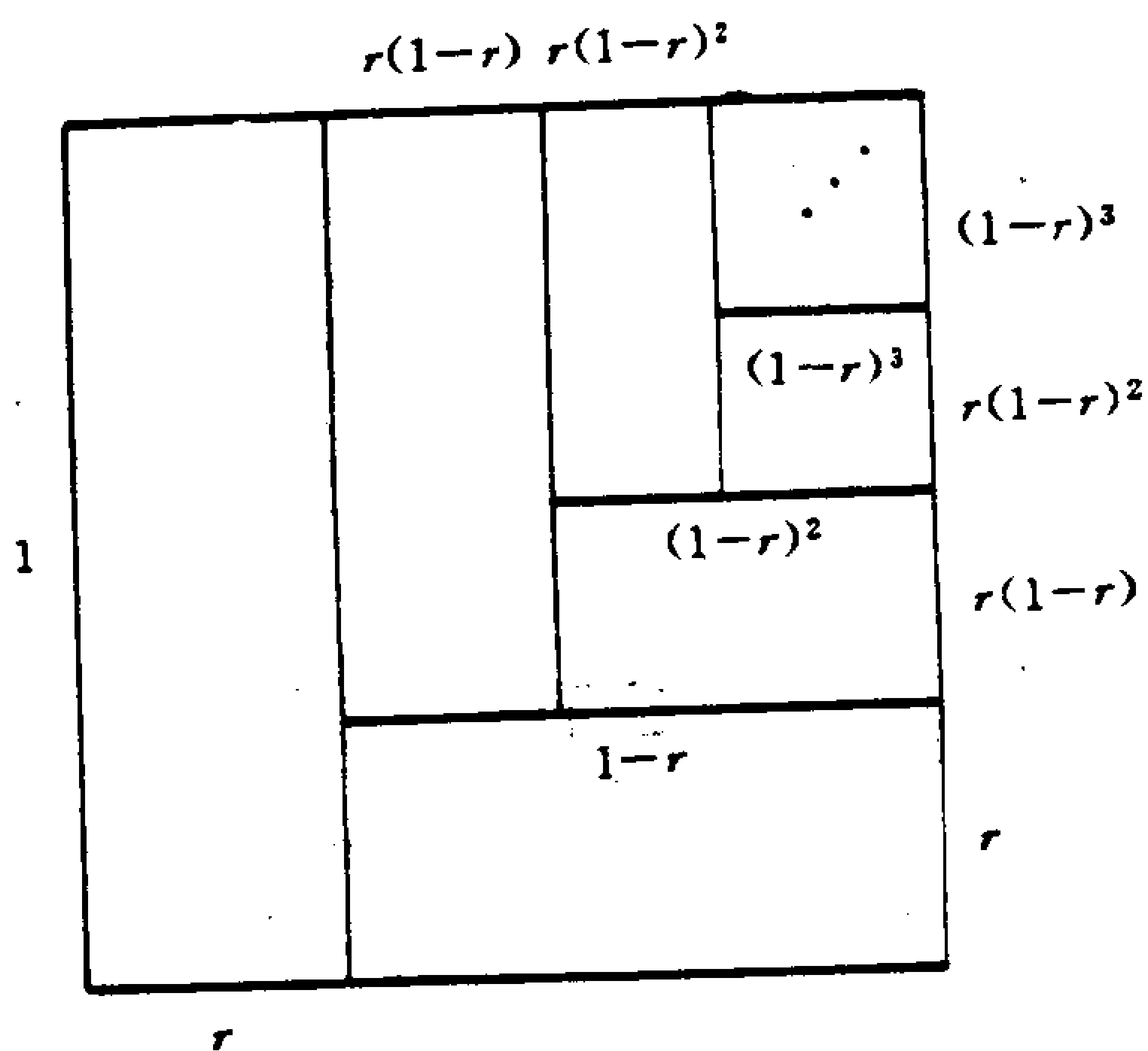
（二）利用面积求无穷数列之和

(1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=1-\frac{1}{2^4}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.$$



$$0<r<1$$

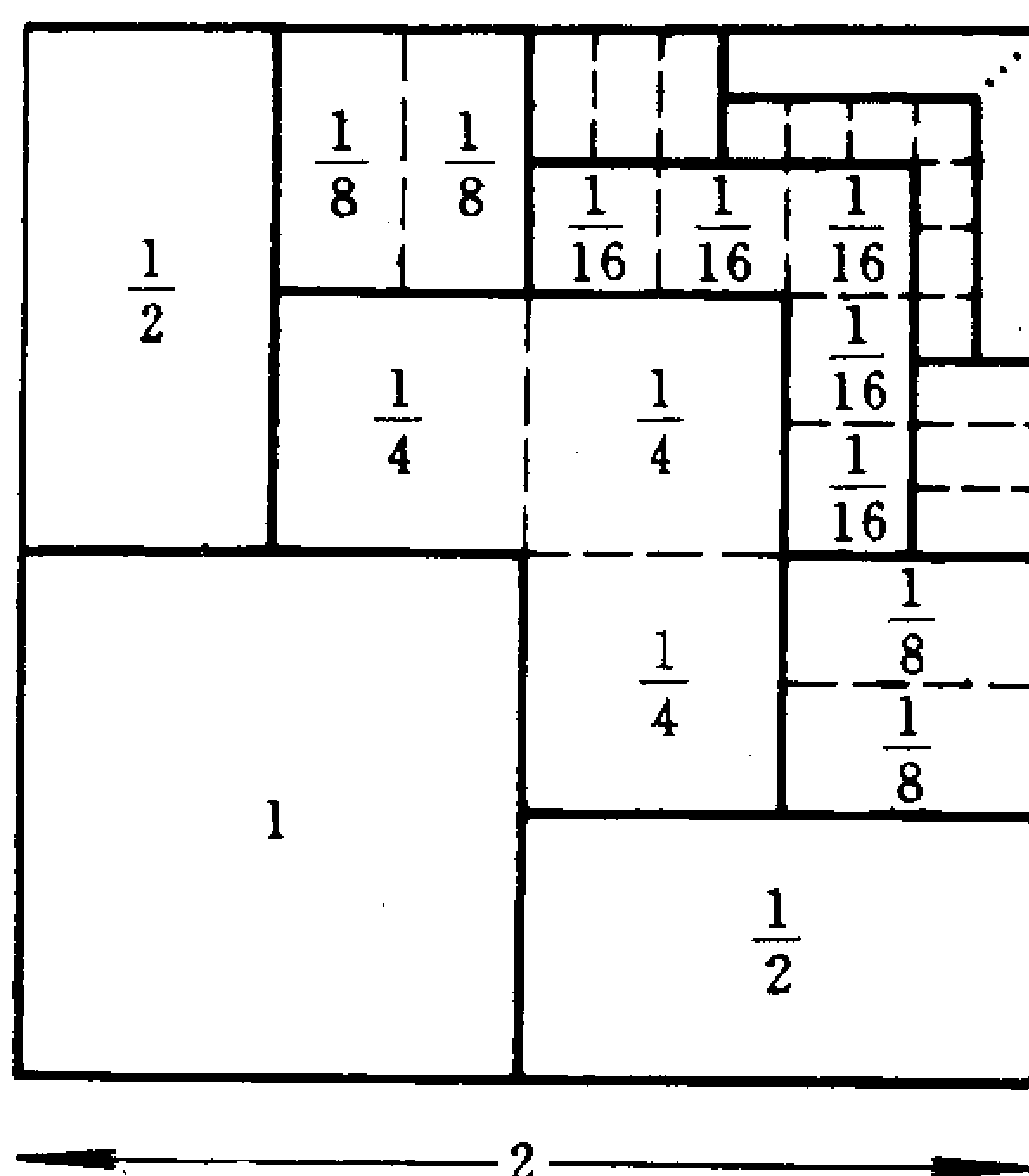
$$r+r(1-r)+r(1-r)^2+r(1-r)^3=1-(1-r)^4,$$

$$r+r(1-r)+\cdots+r(1-r)^4=1-(1-r)^5,$$

$$r+r(1-r)+\cdots+r(1-r)^5=1-(1-r)^6,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-r)^k=\frac{1}{r}.$$

(2)
$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}=4}$$



$$1=4-3\cdot 1,$$

$$1+2\cdot\frac{1}{2}=4-4\cdot\frac{1}{2},$$

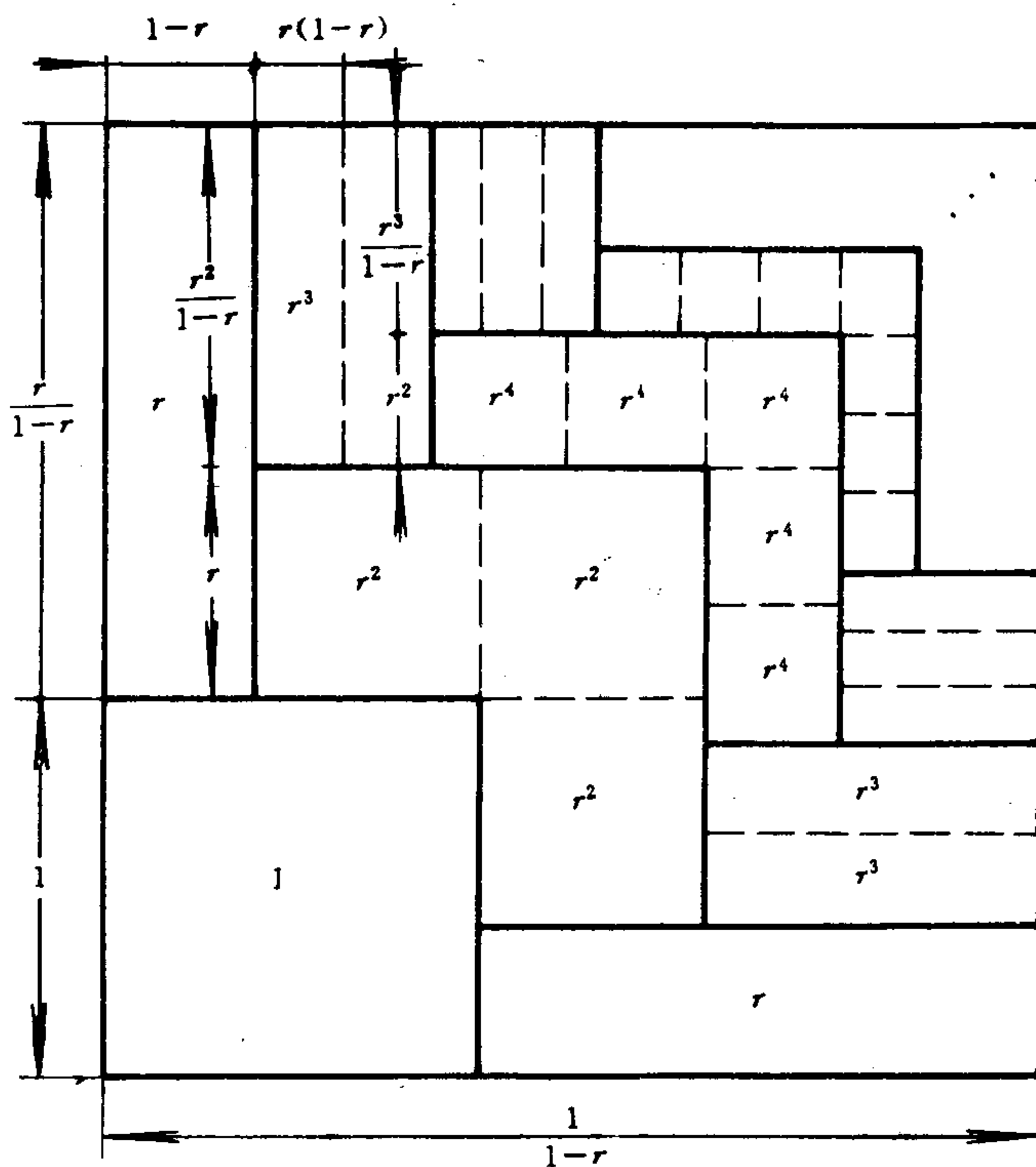
$$1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=4-5\cdot\frac{1}{4},$$

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}=4-6\cdot\frac{1}{8},$$

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots=4.$$

(3) $$\sum_{i=1}^{n} ir^{i-1} = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2 - r^n(n+1-nr)\left(\frac{1}{1-r}\right)^2$$



$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

$$1 = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2 - \left(2 \cdot \frac{r}{1-r} + \left(\frac{r}{1-r}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1-r}\right)^2 - r \cdot (2-r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^2,$$

$$1+2r=\left(\frac{1}{1-r}\right)^2-\left(3\cdot r^2+2\cdot\frac{r^2}{1-r}\cdot(2r)+\left(\frac{r^2}{1-r}\right)^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1-r}\right)^2-r^2(3-2r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^2,$$

$$1+2r+3r^2=\left(\frac{1}{1-r}\right)^2-\left(4r^3+2\frac{r^2}{1-r}(2r^2)+\left(\frac{r^2}{1-r}\right)^2\right)$$

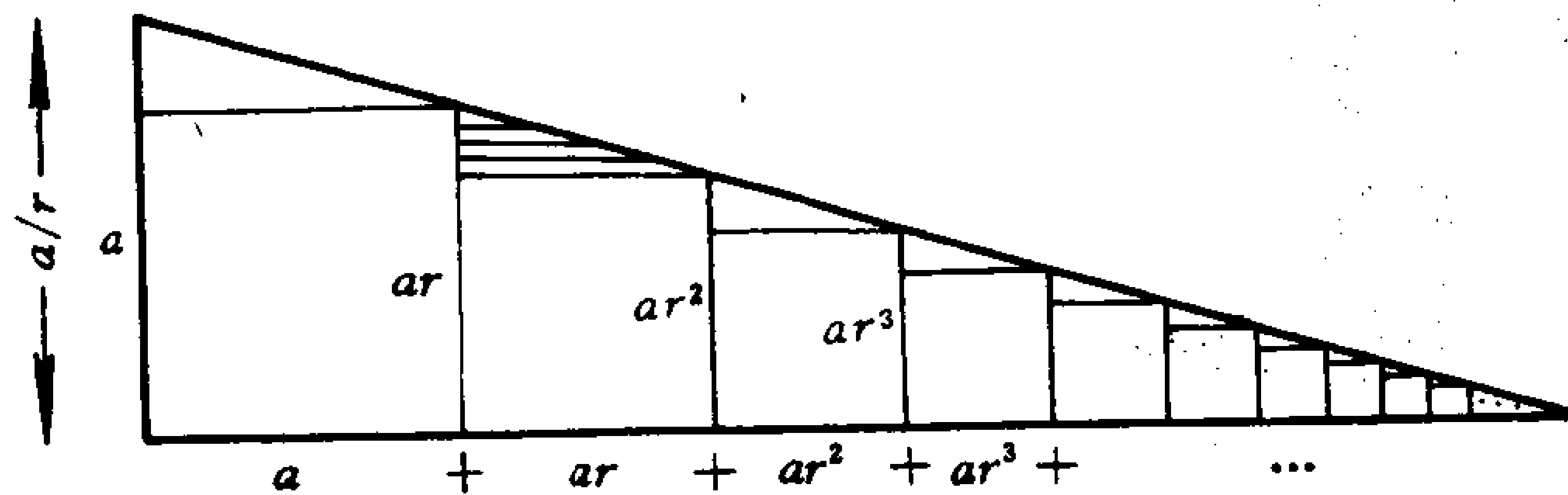
$$=\left(\frac{1}{1-r}\right)^2-r^3(4-3r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^2,$$

....

$$1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{1-r}\right)^2-r^n(n+1-nr)\left(\frac{1}{1-r}\right)^2.$$

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r},\qquad 0<r<1$$

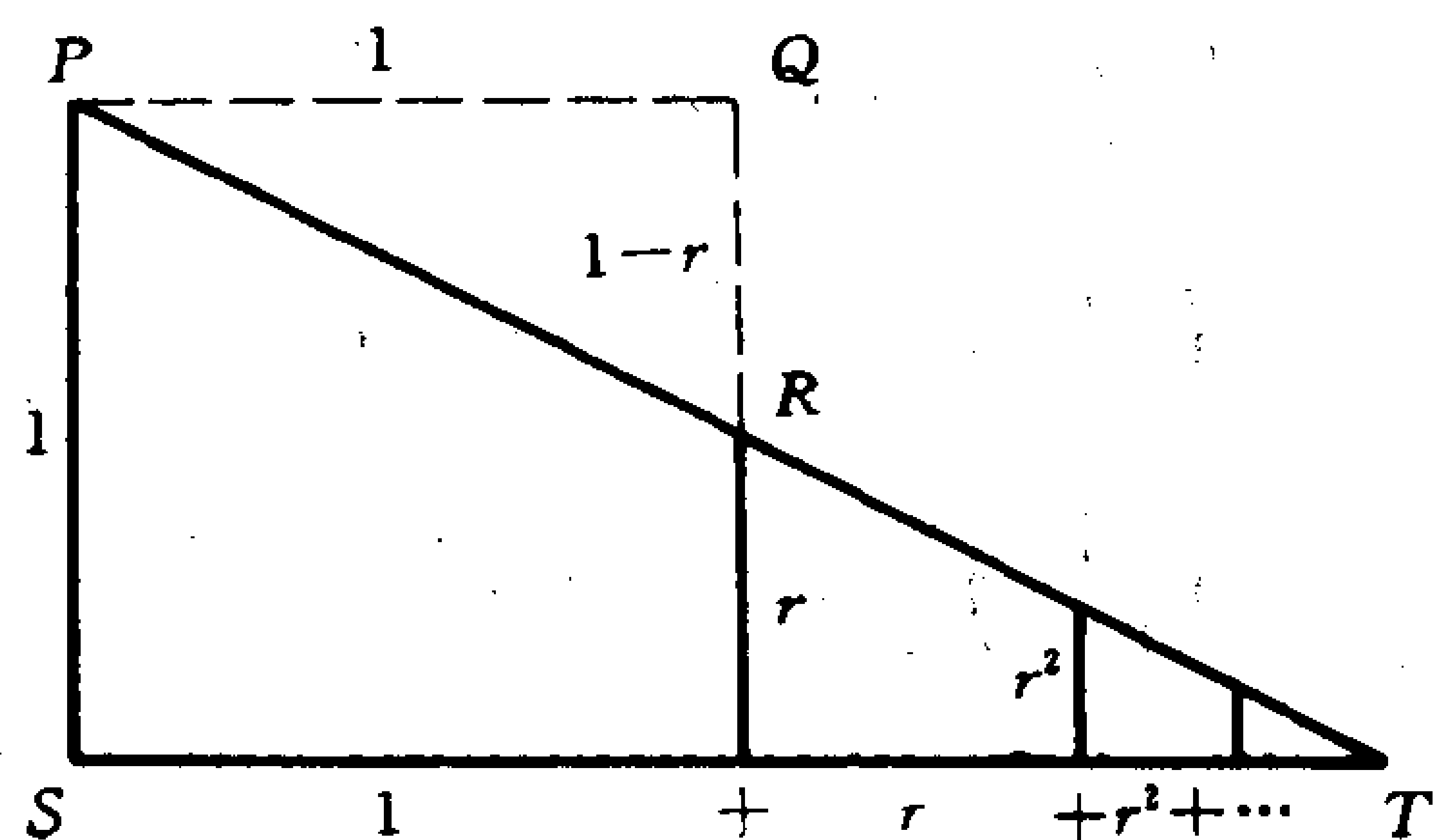




$$\frac{a-ar}{ar}=\frac{a/r}{a+ar+ar^2+ar^3+\cdots},$$

$$\Rightarrow\ a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=\frac{a}{1-r}.$$

$$\sum_{n=0} r^n = \frac{1}{1-r}, \qquad 0<r<1$$

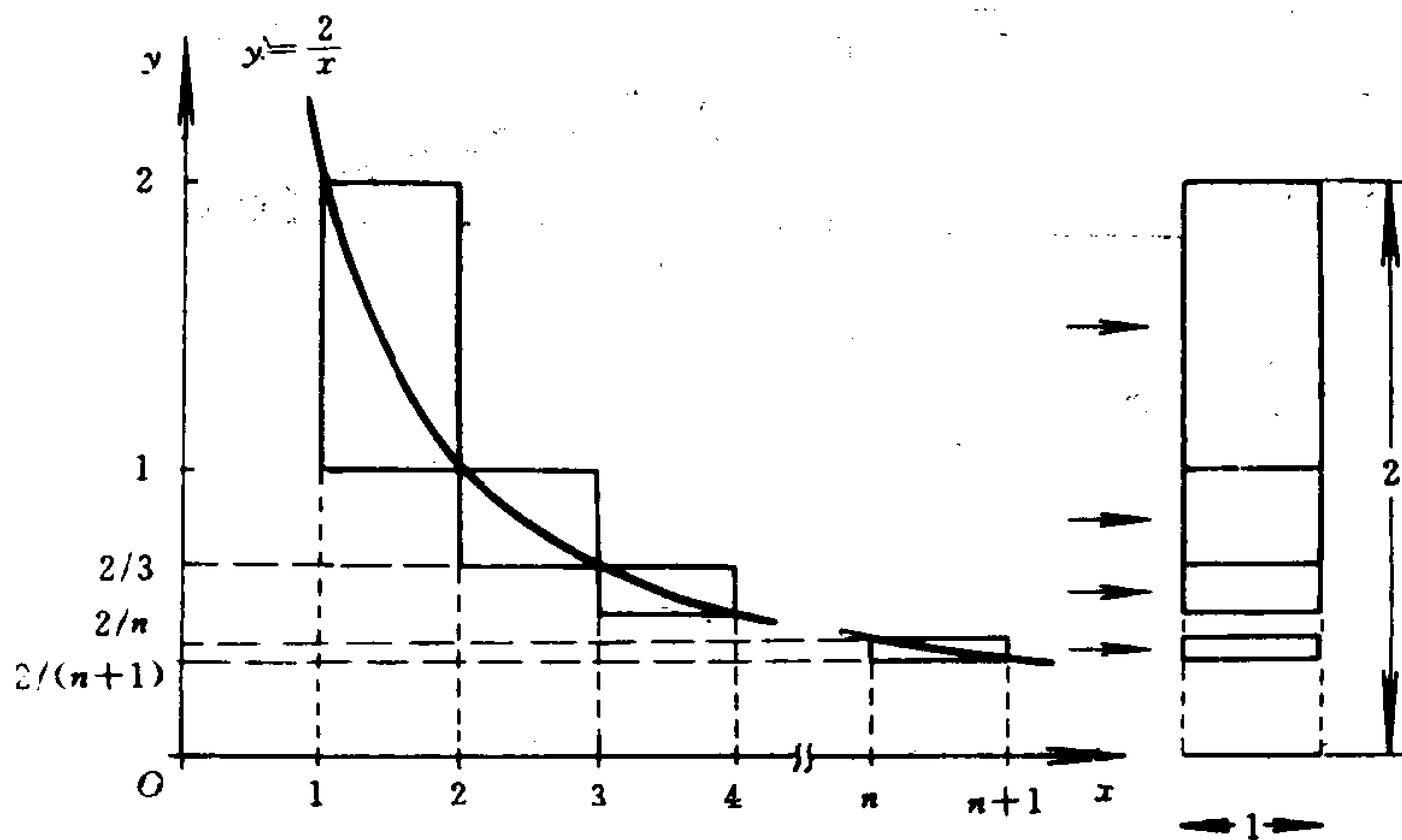


$$\triangle PQR \backsim \triangle TSP,$$

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1+r+r^2+\cdots}{1},$$

$$\Rightarrow\ 1+r+r^2+\cdots = \frac{1}{1-r}.$$

(5) $$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \cdots = 2$$

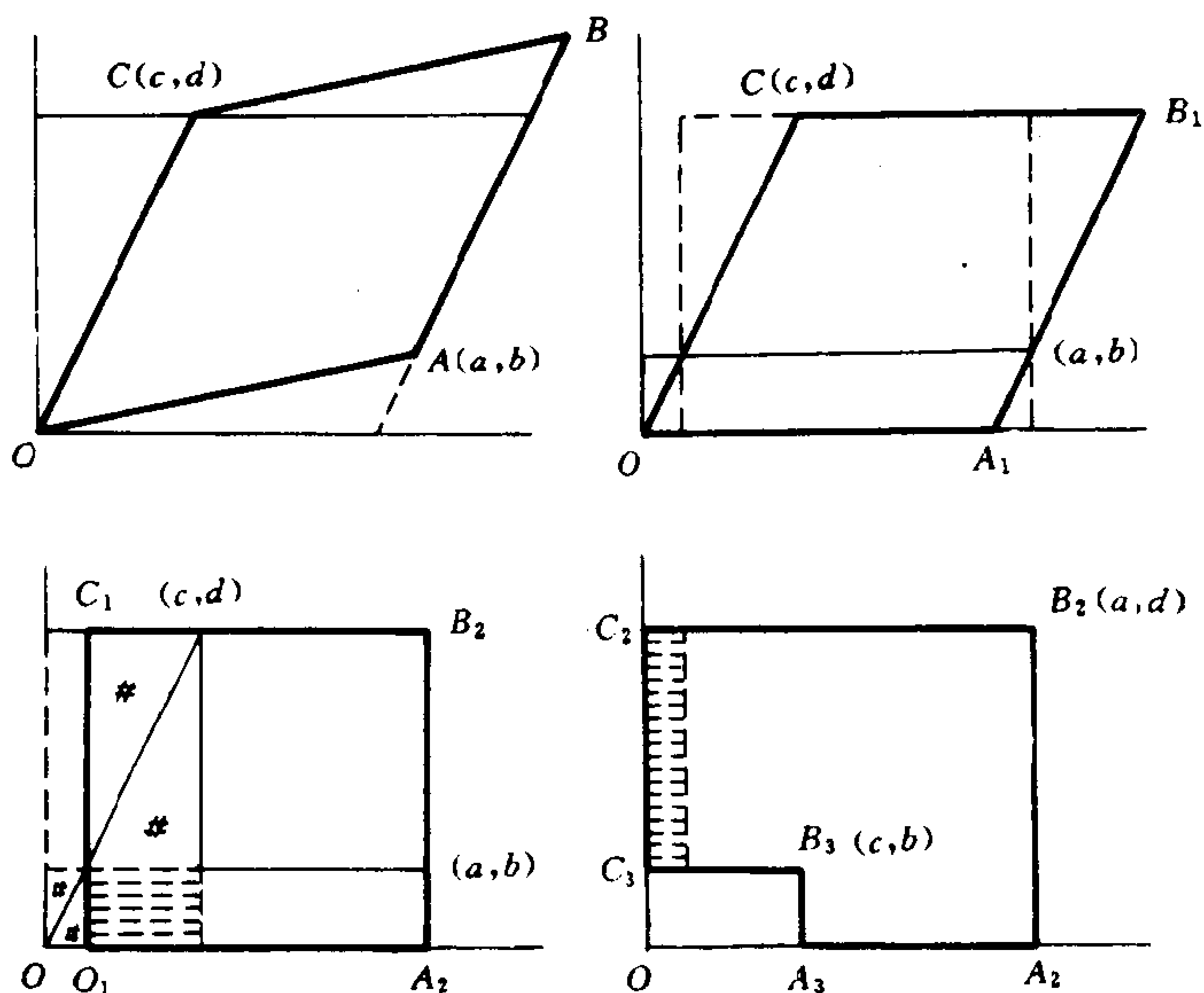


$$1\cdot(2-1)+1\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)+1\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)+\cdots$$

$$+1\cdot\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots=2.$$

（三）代数与几何关系式

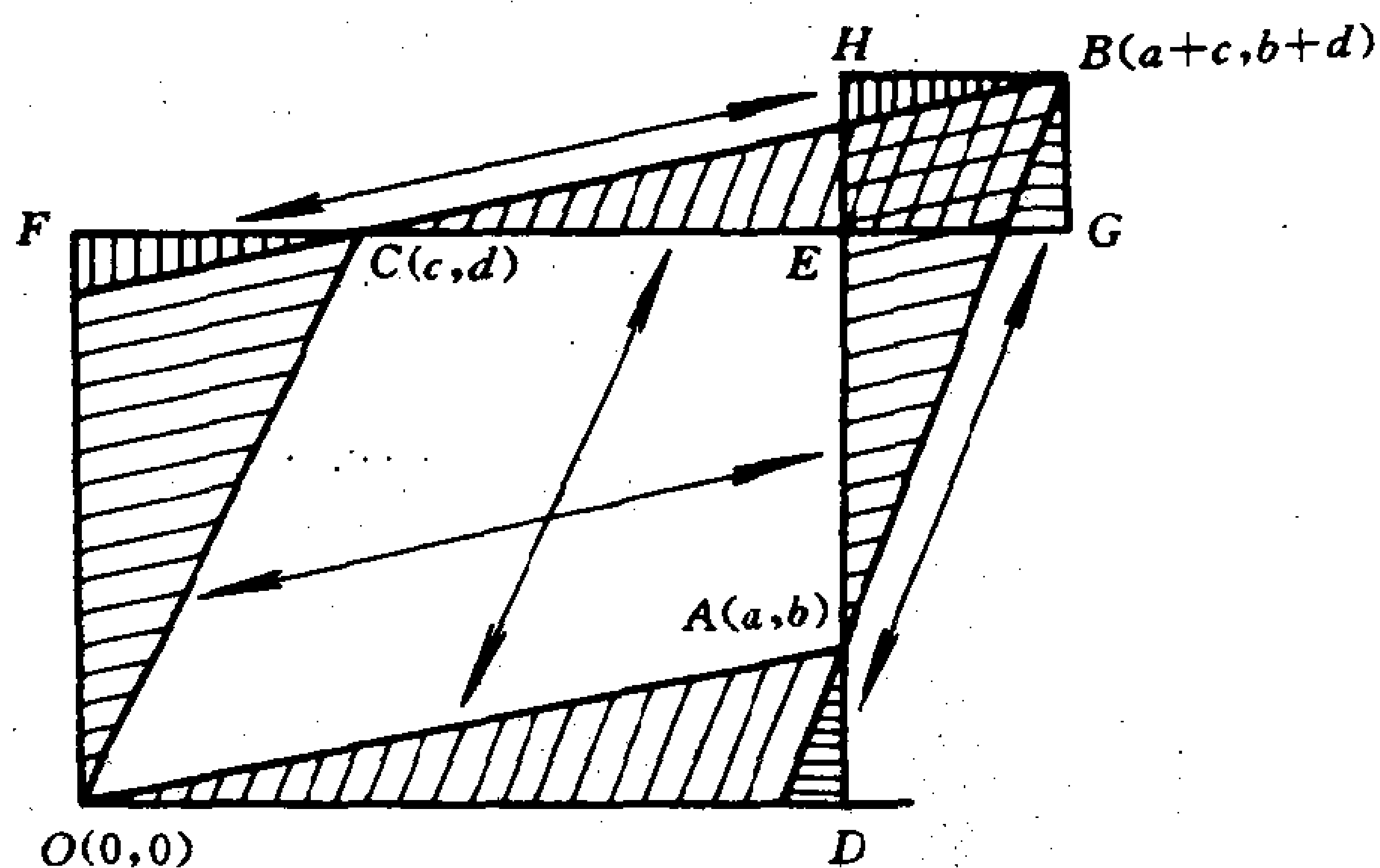
(1)　平行四边形 $OABC$ 的面积 $=|ad-bc|$



$OABC$ 面积 $=OA_1B_1C$ 面积 $=O_1A_2B_2C_1$ 面积

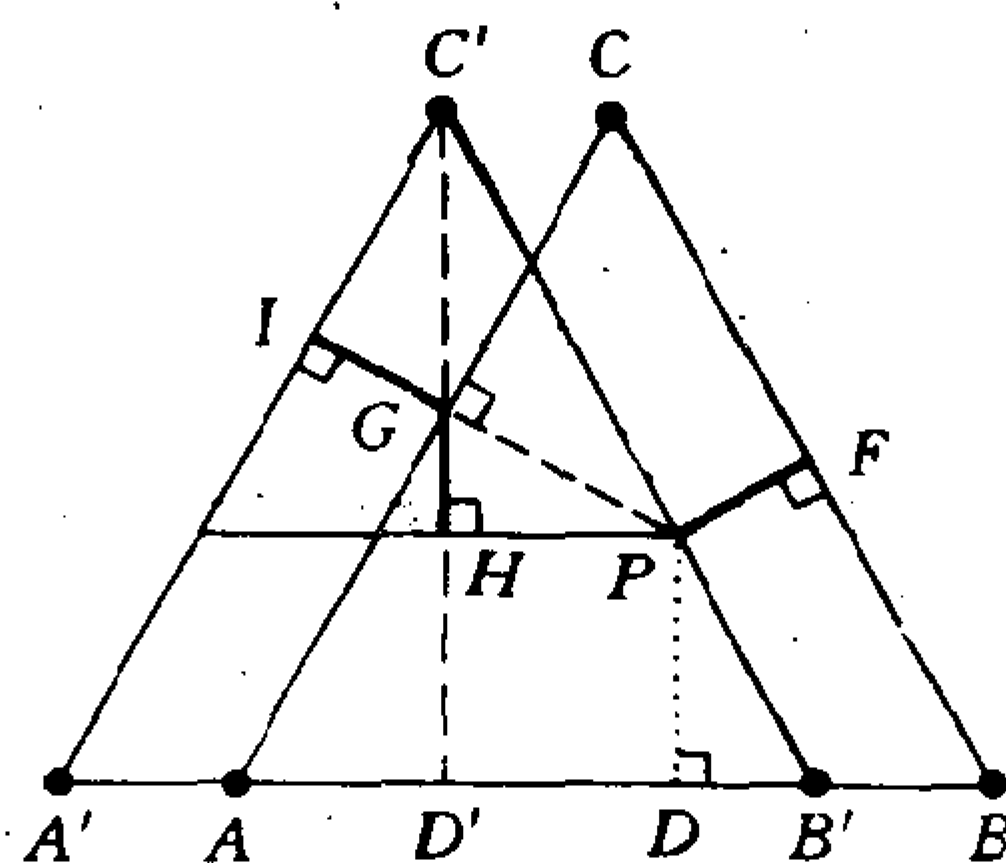
$=OA_2B_2C_2$ 面积 $-OA_3B_3C_3$ 面积。

(2)　平行四边形 $OABC$ 的面积 $=ad-bc$



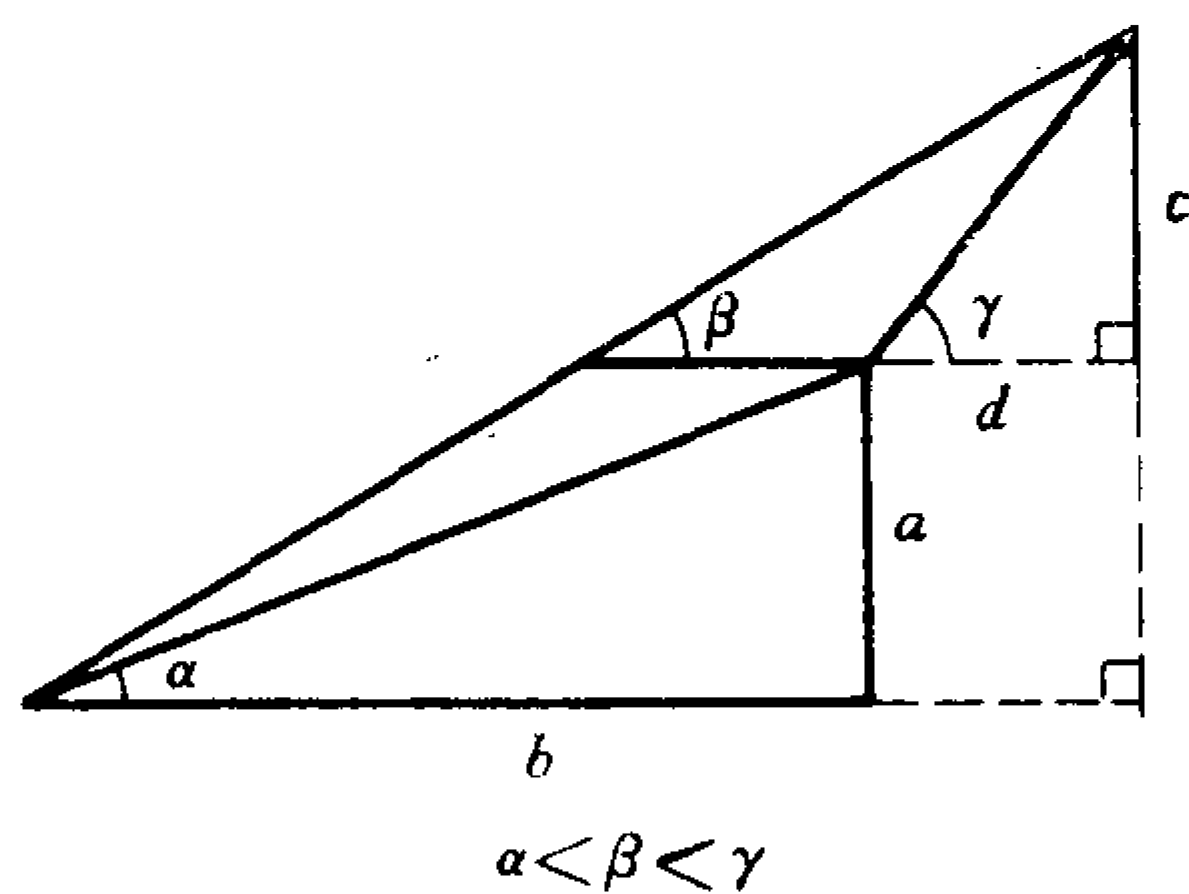
$OABC$ 面积 = $ODEF$ 面积 − $EGBH$ 面积。

(3) 正△上点 P 到三边垂线之和 = 正△的高



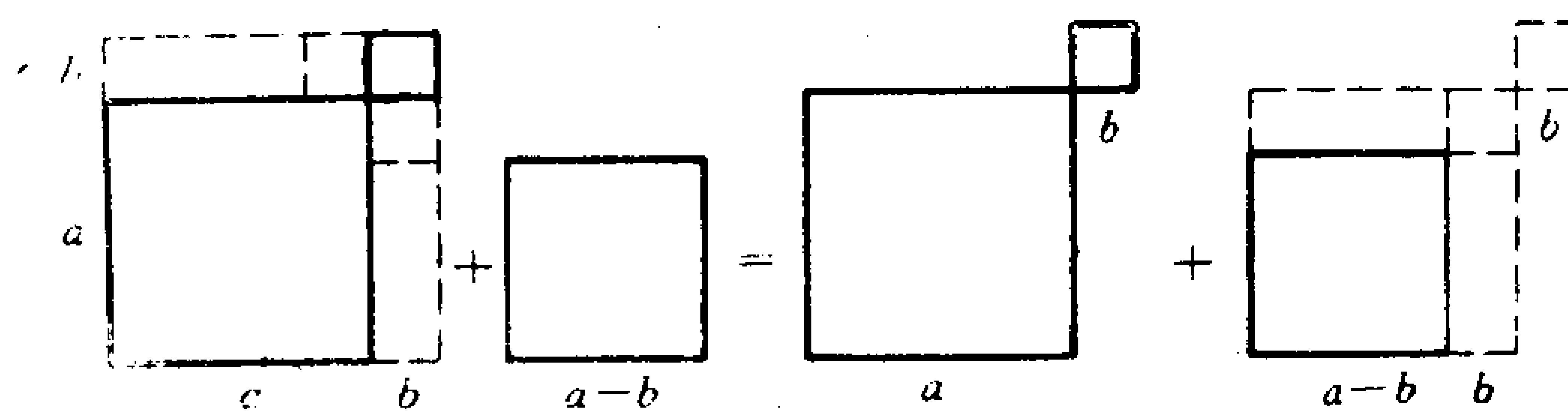
$$PD + PF + PG = PD + GI + PG$$
$$= HD' + GH + GC' = C'D'.$$

(4)
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

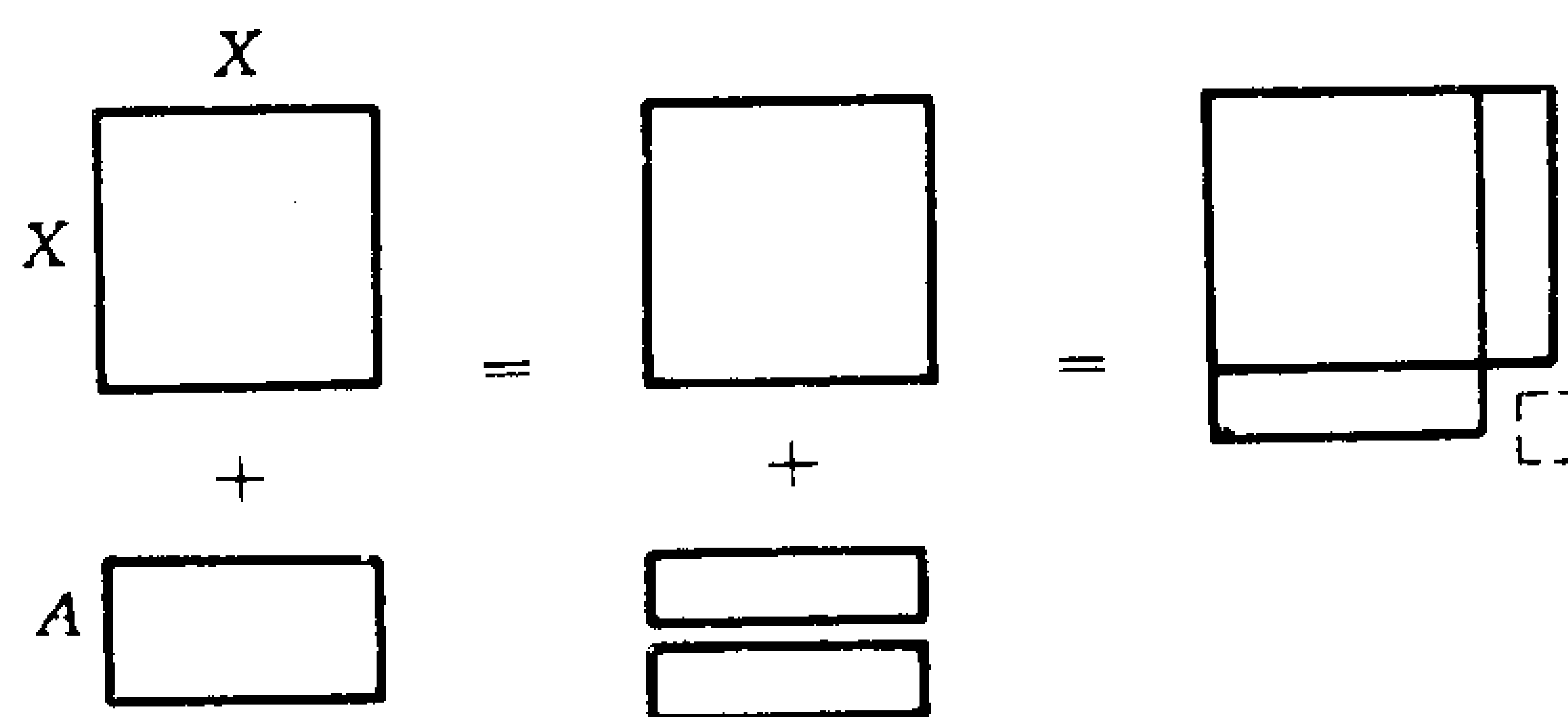


$\alpha < \beta < \gamma$

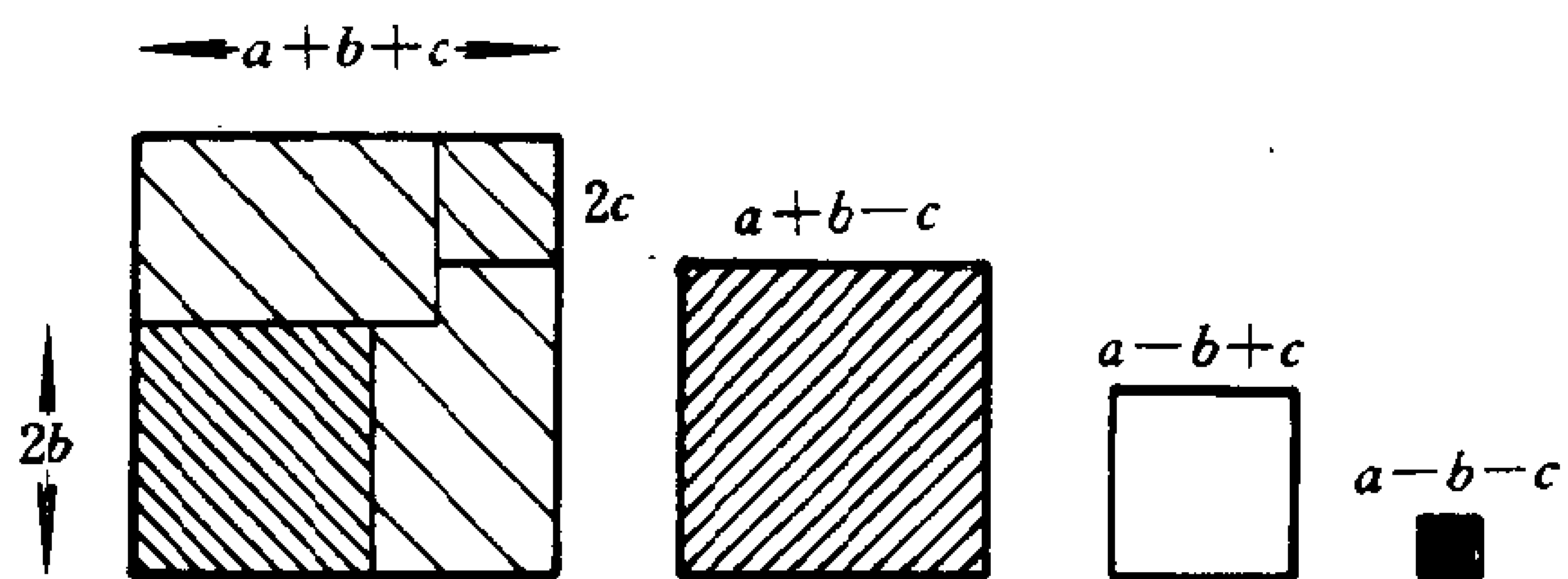
(5) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

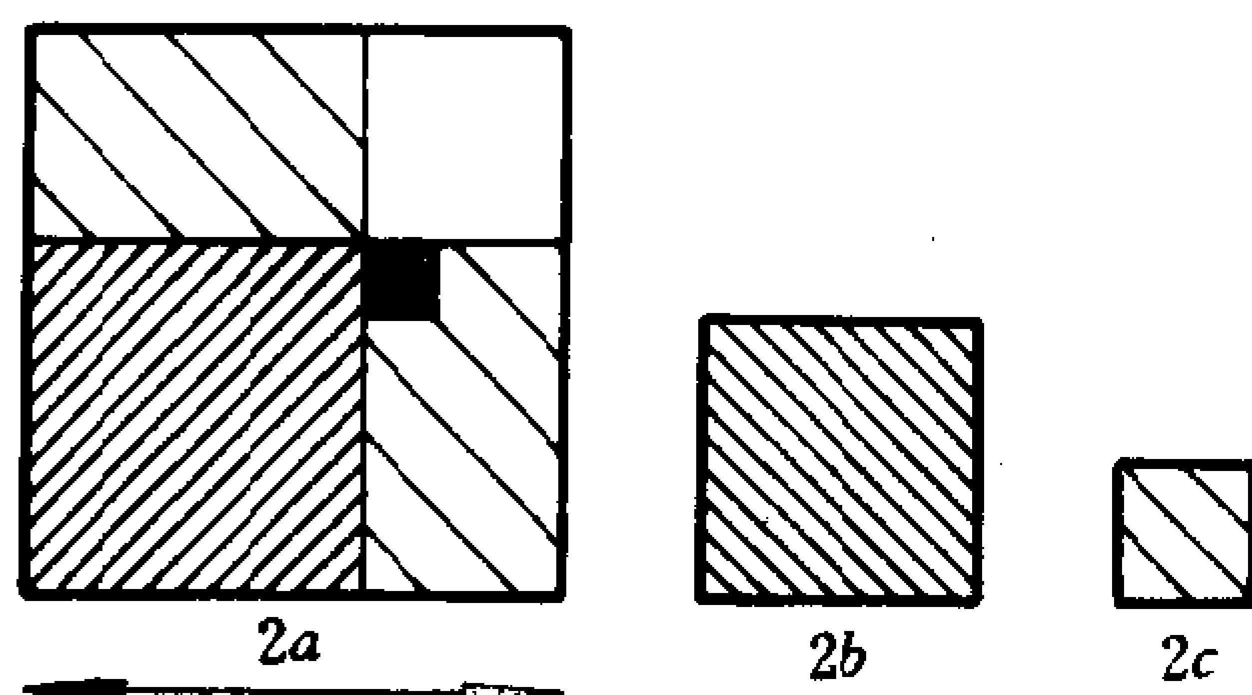


(6) $X^2 + AX = (X + A/2)^2 - (A/2)^2$

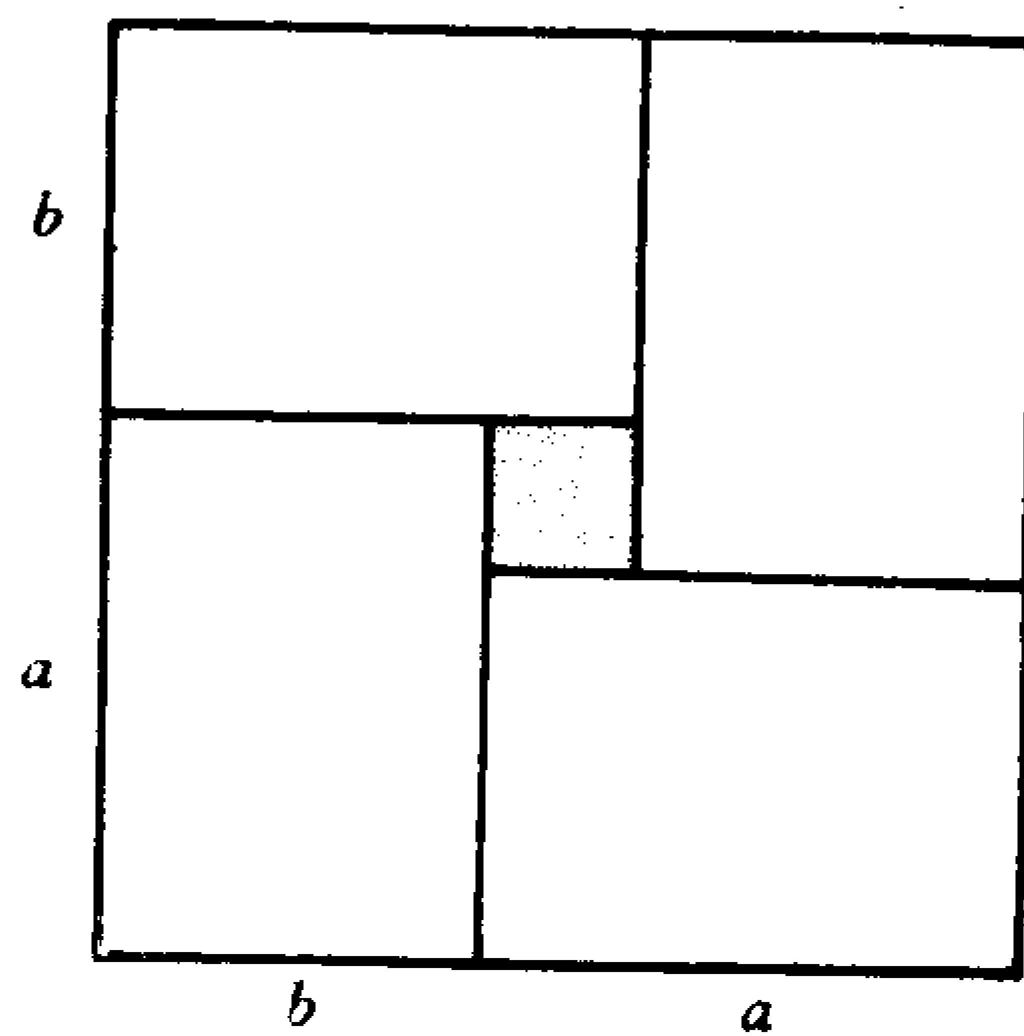


(7) $$(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = 2^2(a^2+b^2+c^2)$$

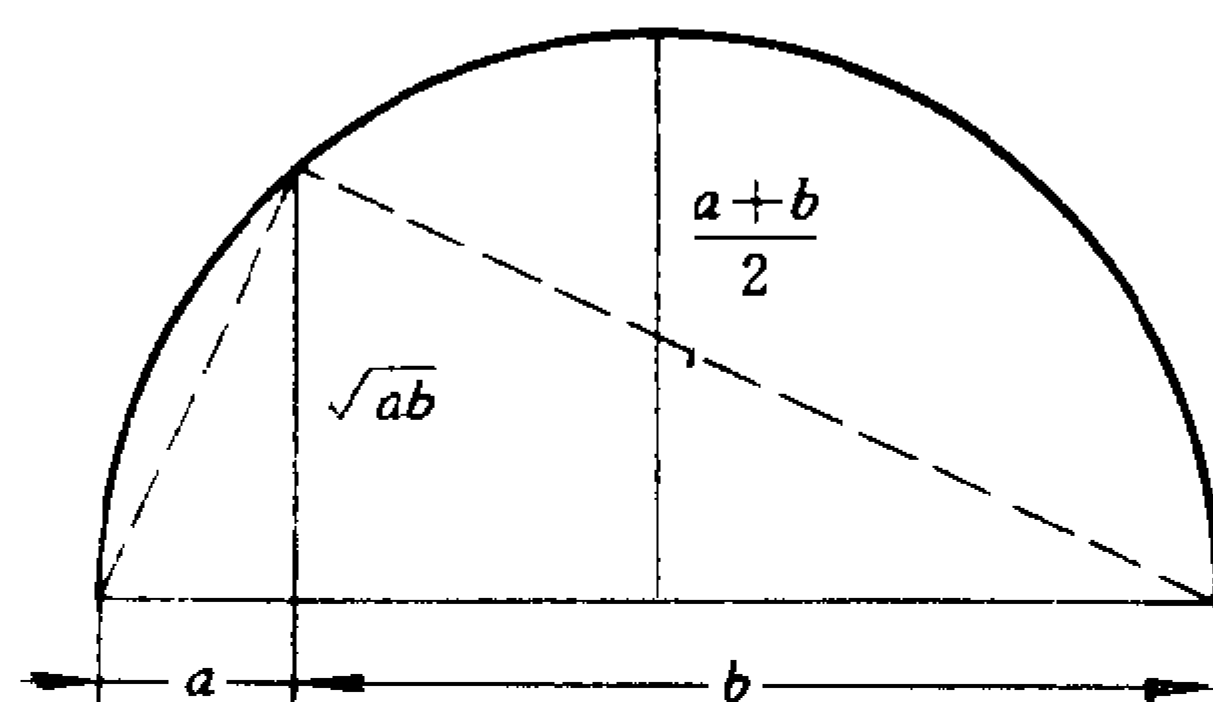




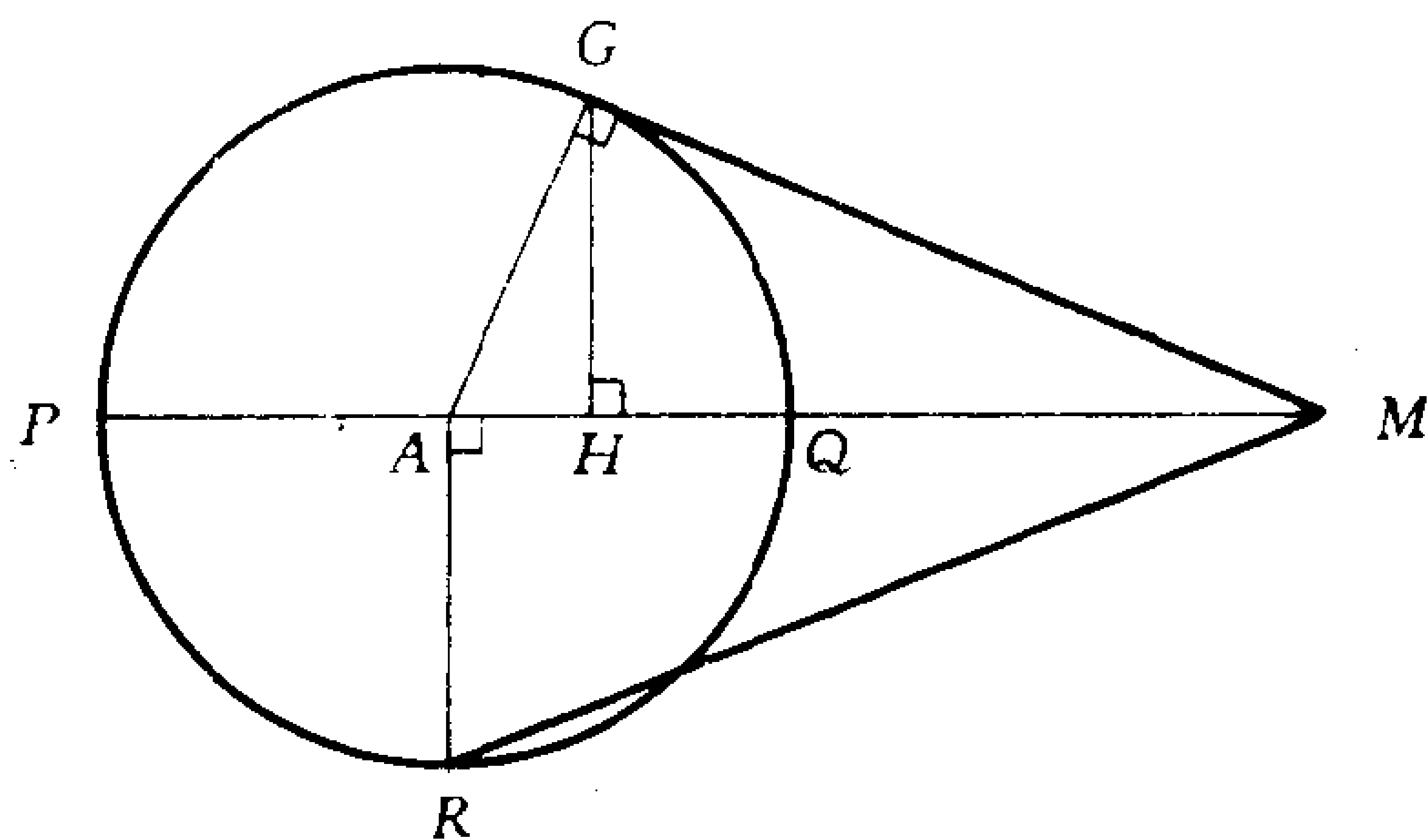
(8) $$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$



(9) $$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$$



(10) $$\left(\frac{1/a+1/b}{2}\right)^{-1}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{1/2}$$

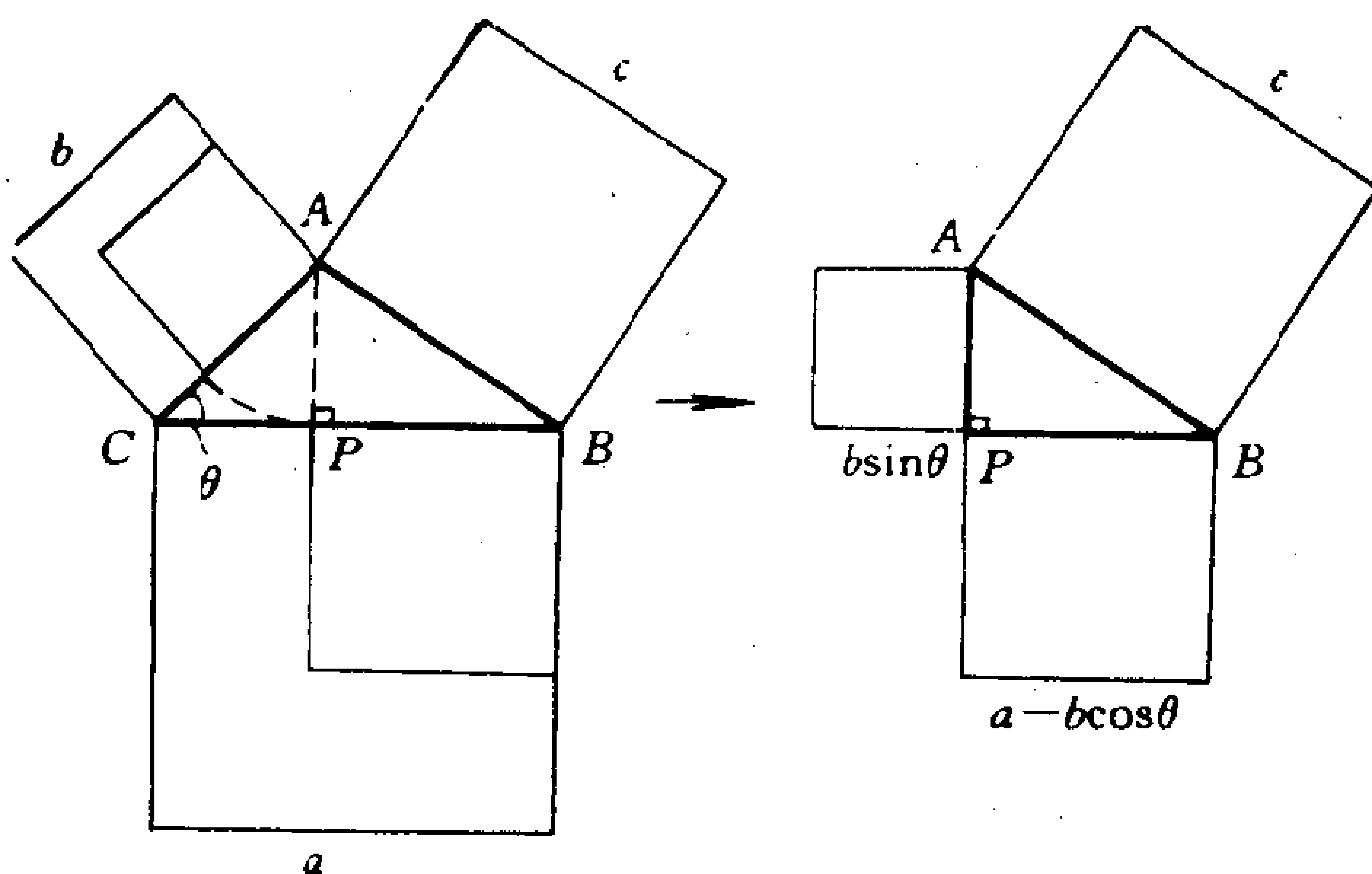


$PM=a$, $QM=b$, $a>b>0$,

$HM<GM<AM<RM$.

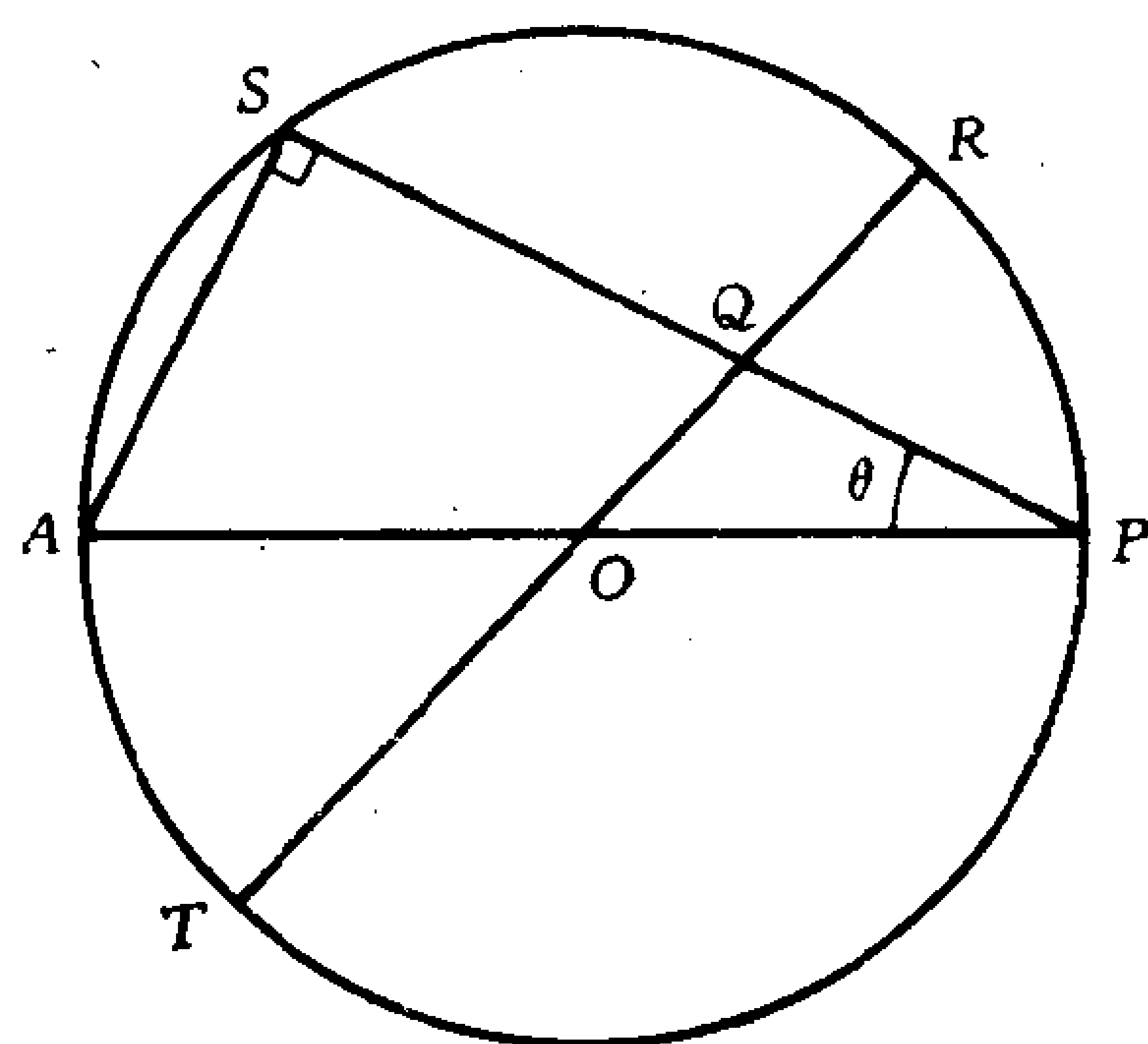
(四) 含有三角函数的关系式

(1) $$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$



$$\angle ACP=\theta,\ c^2=(a-b\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2.$$

$$\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

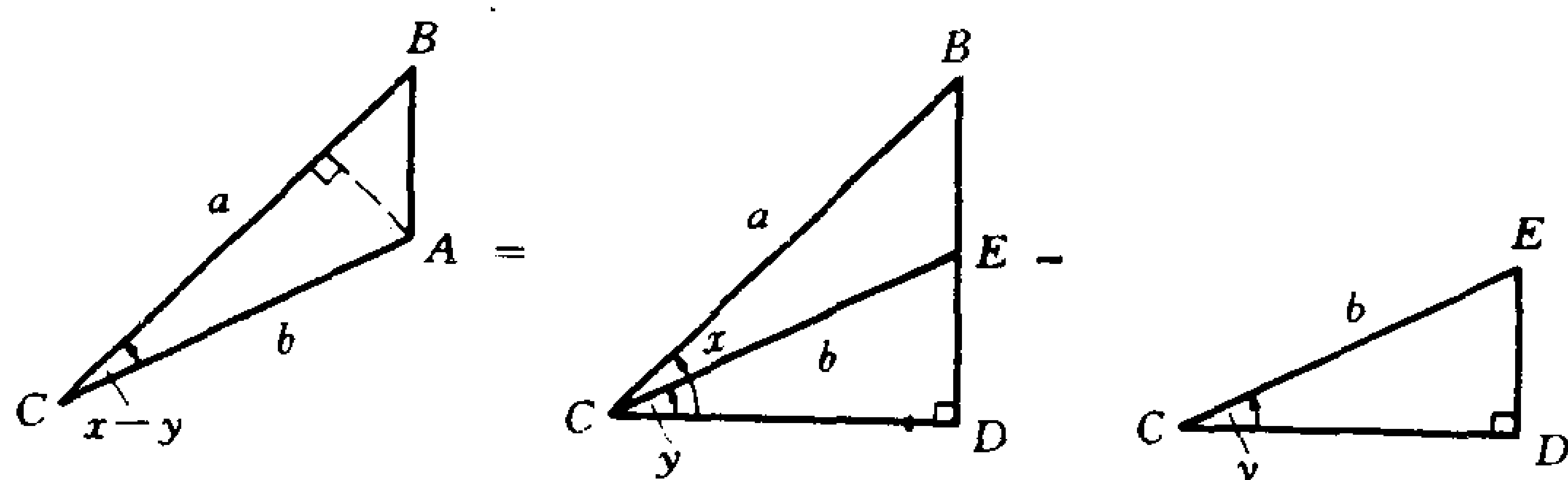


$$\angle OPQ=\theta,\ \ OP=a,\ \ OQ=c,\ \ PQ=b,$$

$$QS=2a\cos\theta-b,$$

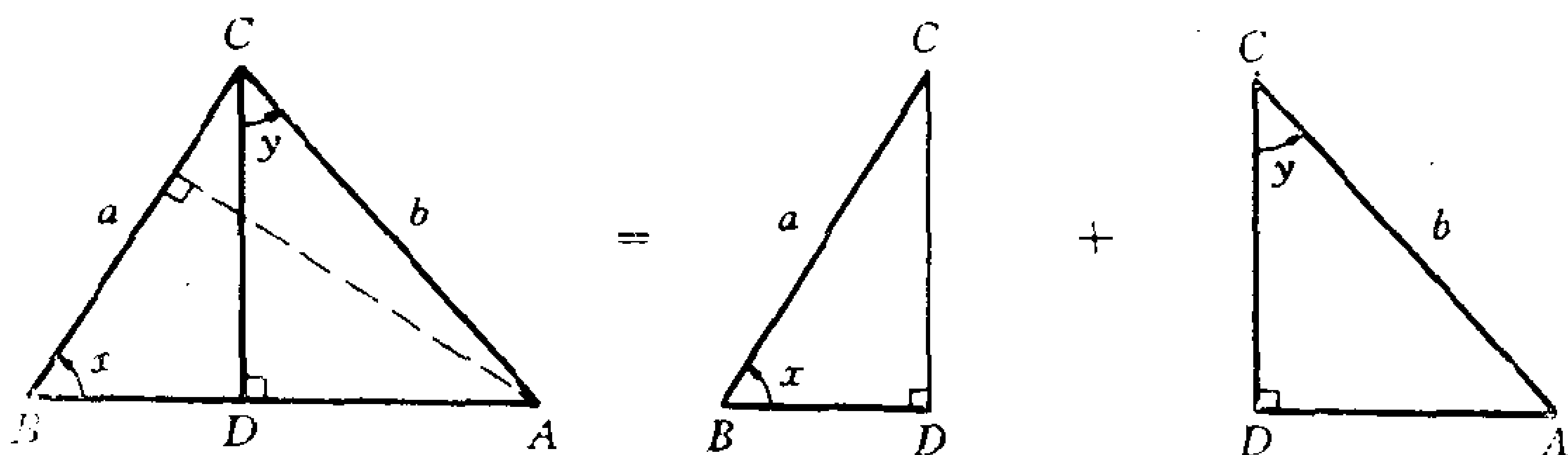
$$QR\cdot QT=QP\cdot QS.$$

(2) $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$



$\triangle CAB$ 的面积 = $\triangle CDB$ 的面积 − $\triangle CDE$ 的面积.

(3) $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

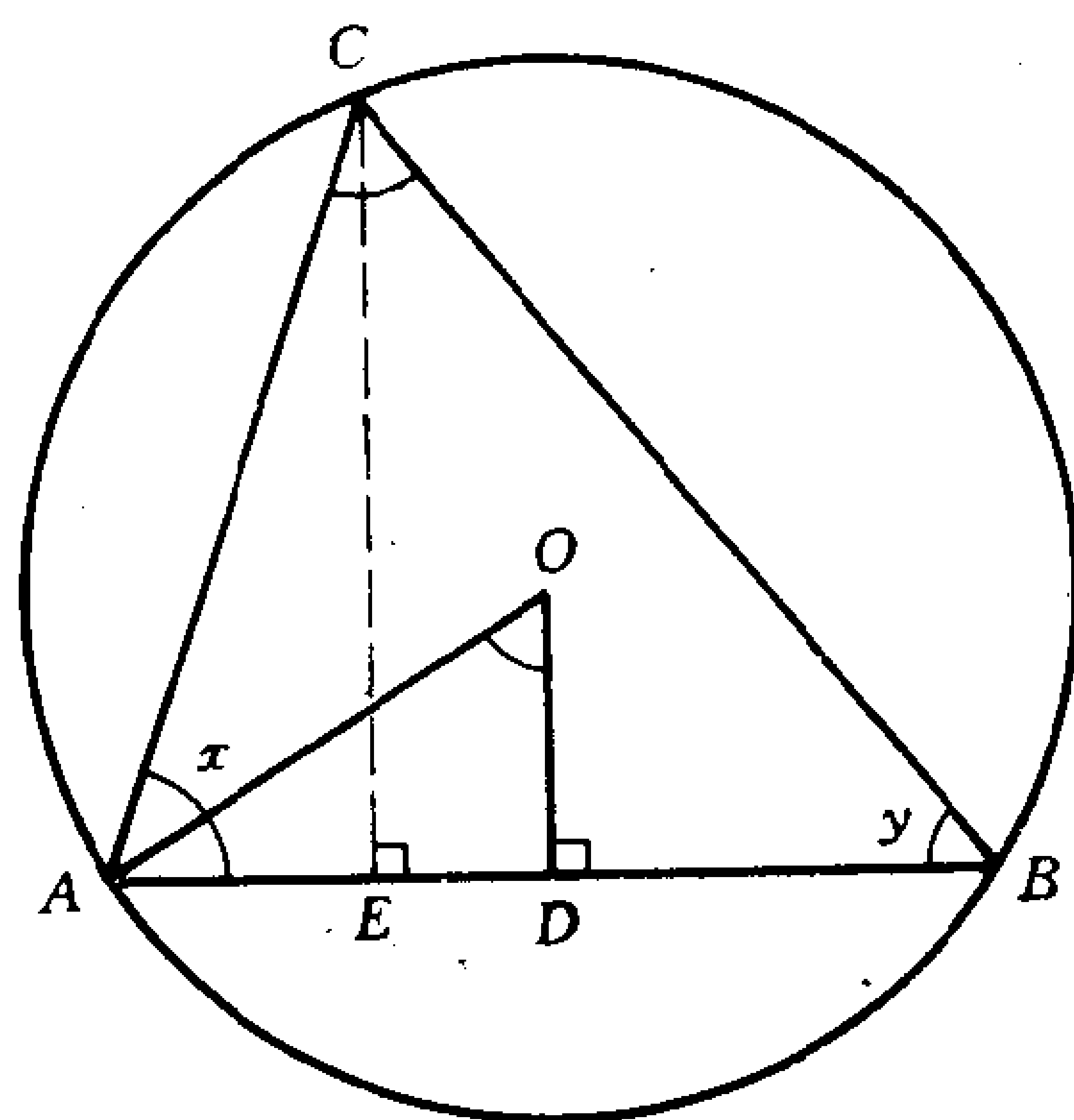


$\triangle ABC$ 的面积 = $\triangle BCD$ 的面积 + $\triangle DCA$ 的面积,

$$\angle BCA=\frac{\pi}{2}-x+y,\quad CD=a\sin x=b\cos y.$$

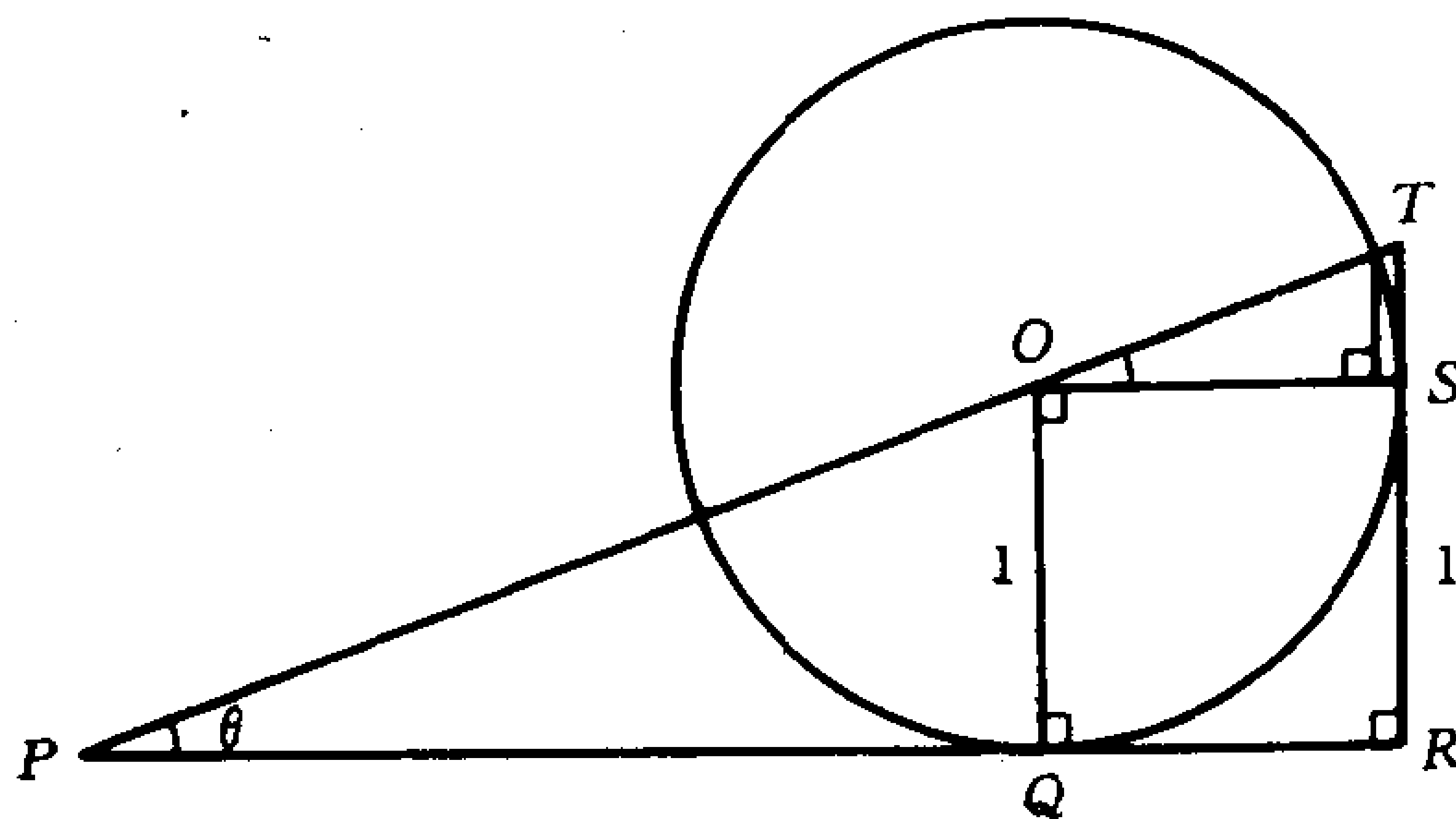
(4) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$
$0<x+y<\pi$

$$OA=OB=OC=\frac{1}{2},\angle CAB=x,\quad \angle CBA=y.$$



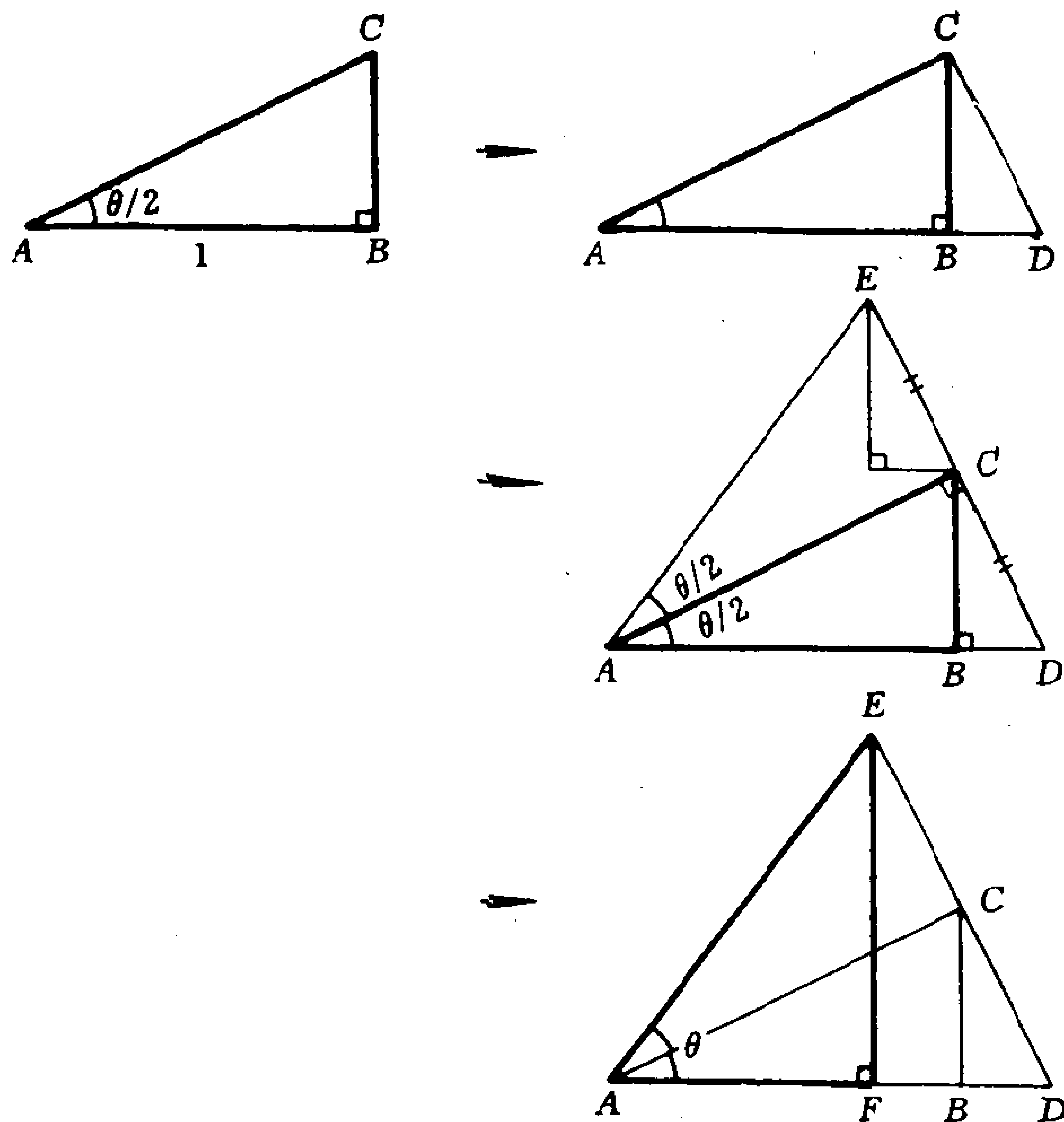
$$\angle ACB = \angle AOD = \pi - (x + y),$$
$$\sin(x + y) = AB = AE + EB,$$
$$\sin x = BC, \quad \sin y = AC.$$

(5) $(\operatorname{tg}\theta + 1)^2 + (\operatorname{ctg}\theta + 1)^2 = (\sec\theta + \csc\theta)^2$



$$PQ = \operatorname{ctg}\theta, \quad ST = \operatorname{tg}\theta,$$
$$PO = \csc\theta, \quad OT = \sec\theta.$$

(6) $$\sin\theta=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}},\qquad \cos\theta=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

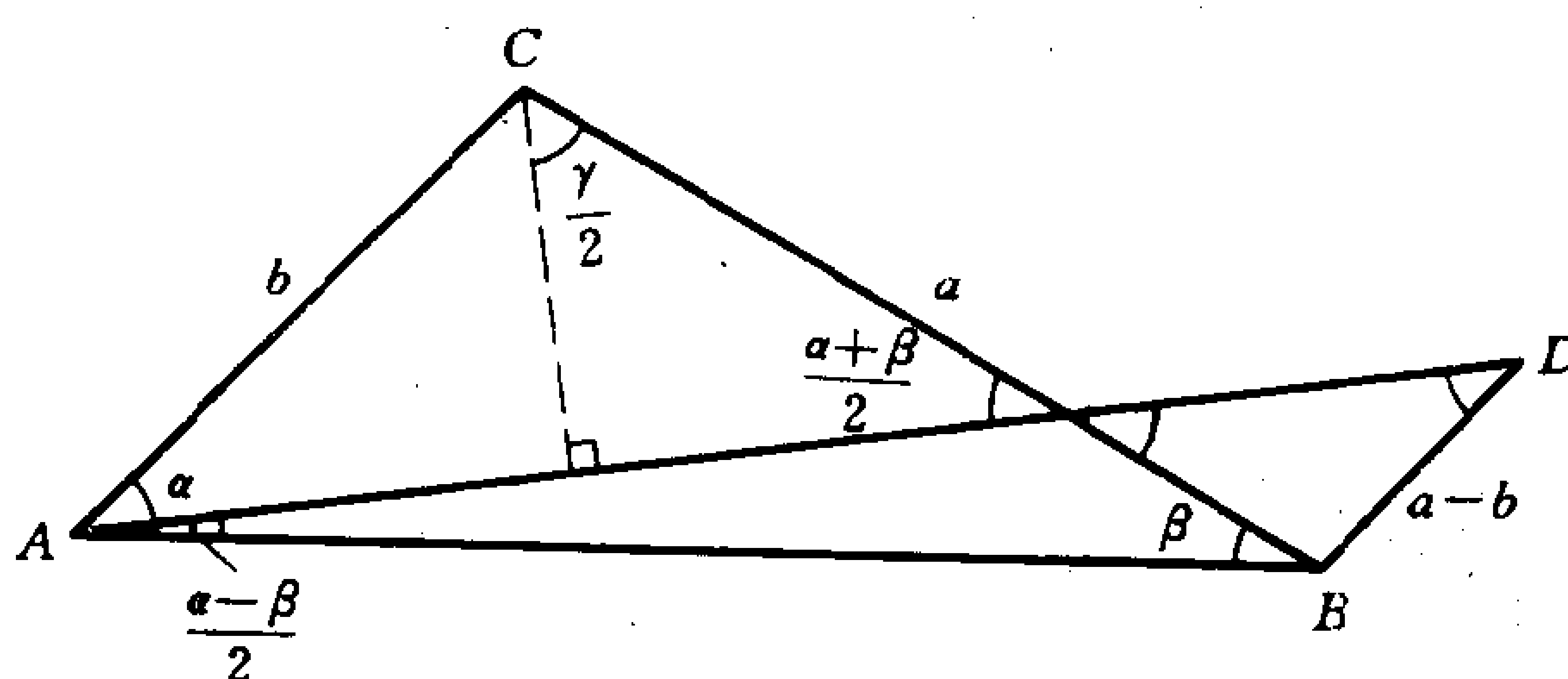


$$\sin\theta=\frac{2BC}{AE}=\frac{2BC}{AB+BD},$$

$$\cos\theta=\frac{AF}{AE}=\frac{AB-BD}{AB+BD},$$

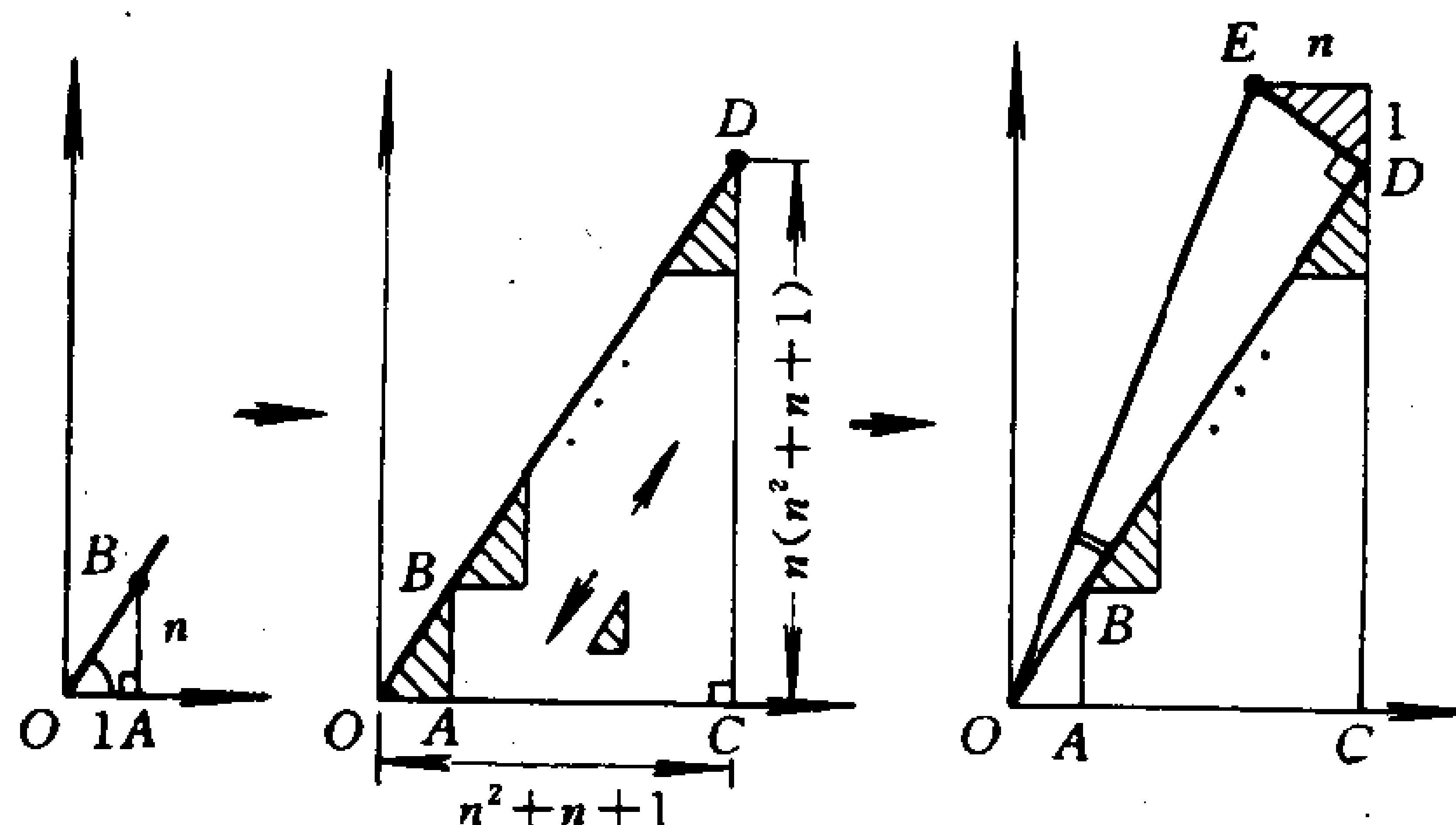
$$AB=1.$$

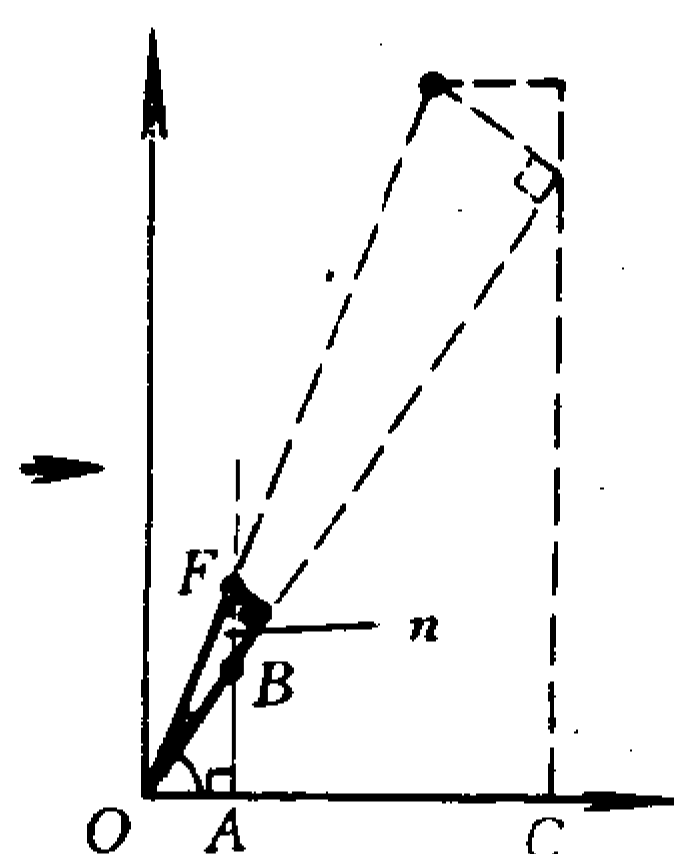
(7) $$(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}=c\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right),\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

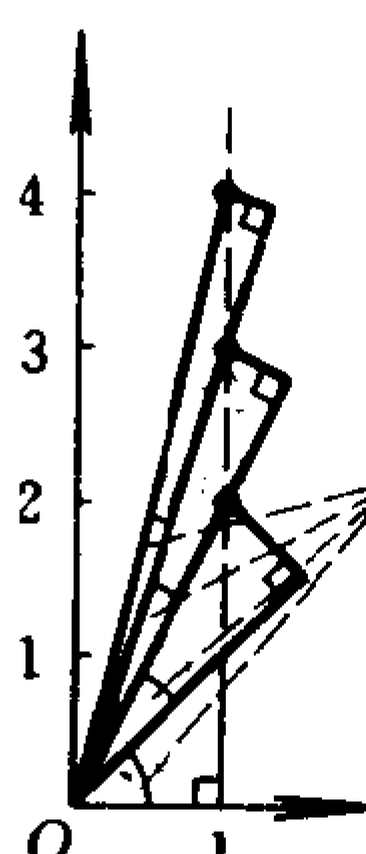


$AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, $BD=a-b$.

(8)







$\rightarrow \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2-n+1}$.

$n=3$,

$n=2$,

$n=1$,

$n=0$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arc\,tg}(N+1) \to \frac{\pi}{2}, \quad N \to \infty}$$

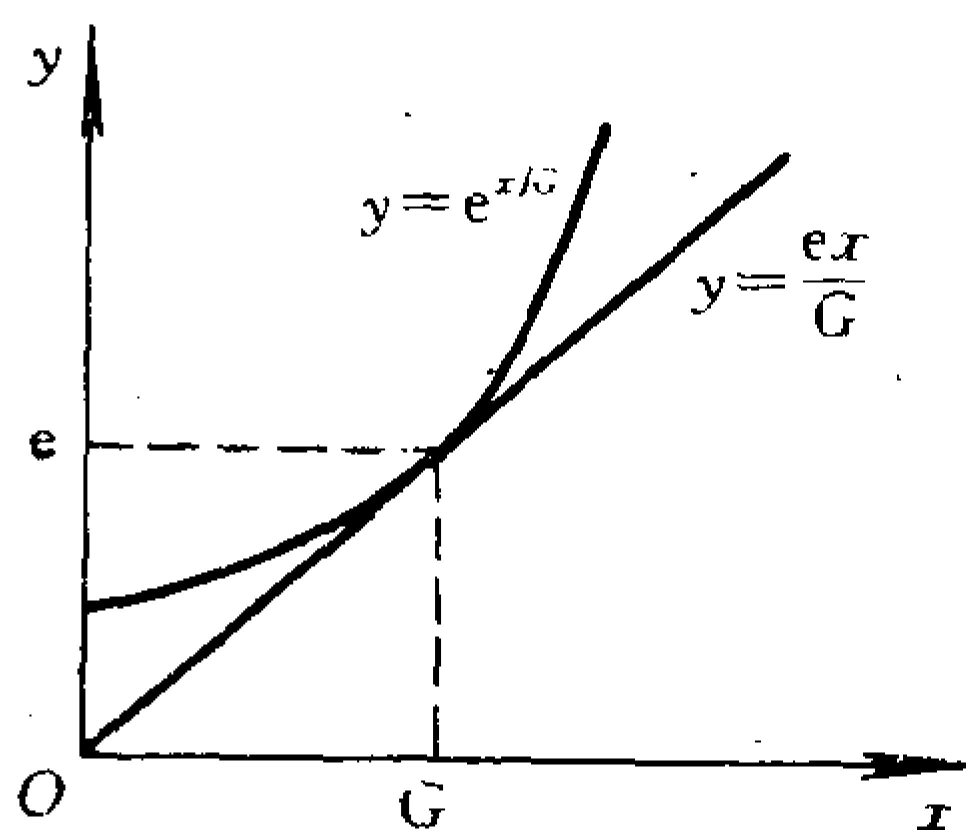
$$B(1,n), F(1,n+1), \qquad \operatorname{tg}\angle EOD = \frac{1}{n^2+n+1},$$

$$\operatorname{arc\,tg} n + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arc\,tg}(n+1).$$

（五）利用曲线性质证不等式

(1) $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$，

等号仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立

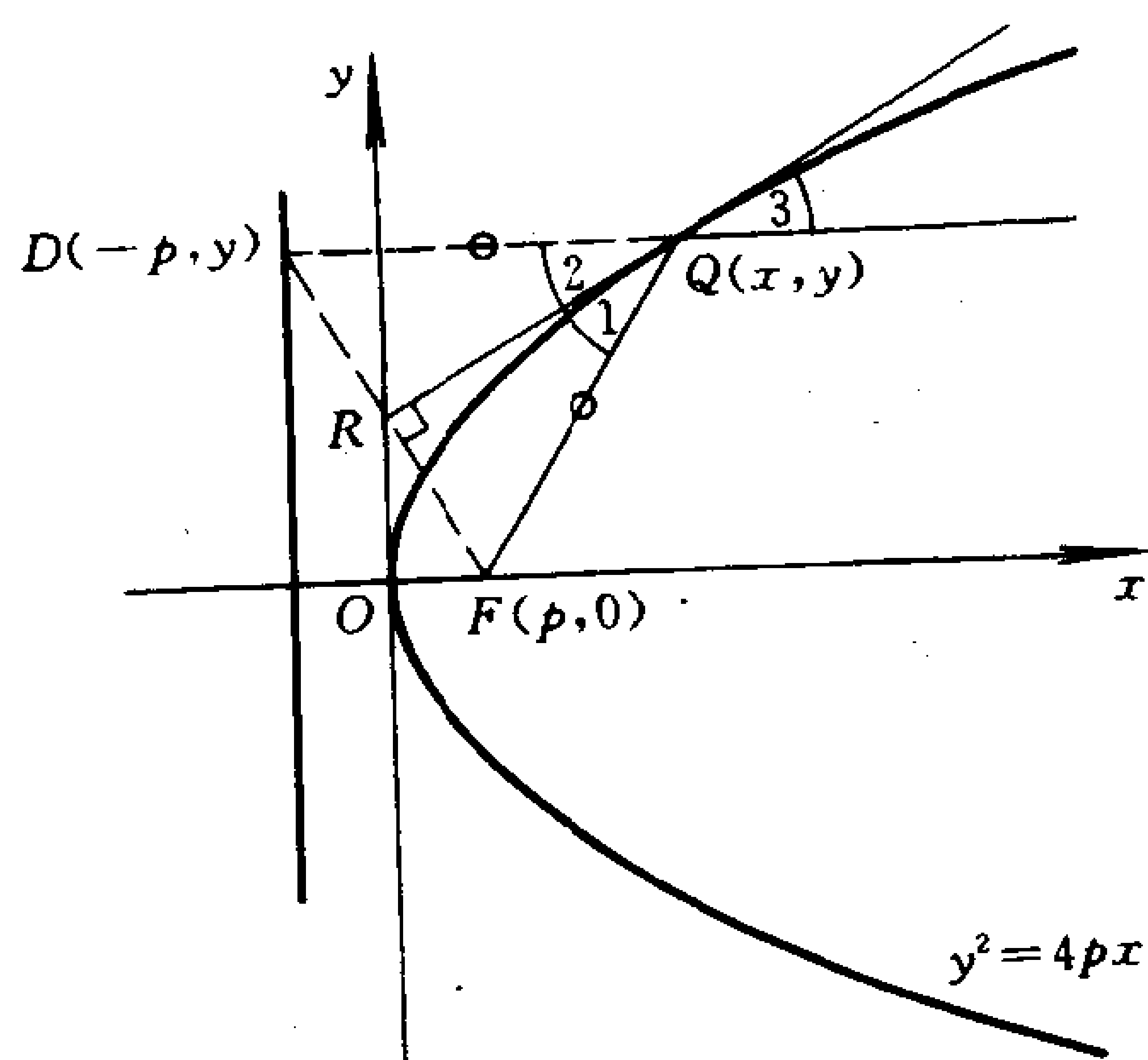


$$G = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n},$$

$$e^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)/G} = e^{a_1/G} \cdot e^{a_2/G} \cdots e^{a_n/G}$$

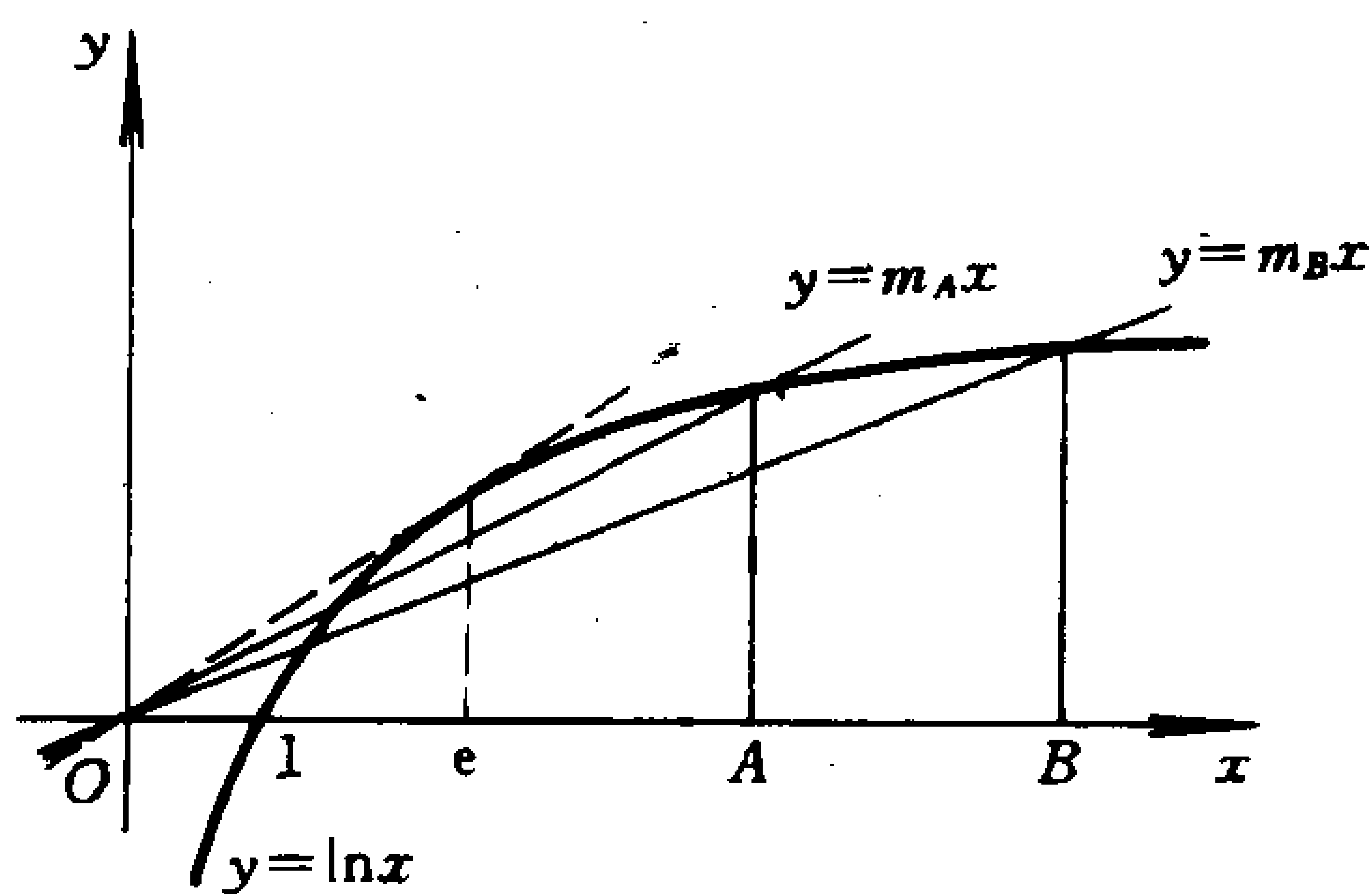
$$\geqslant \frac{ea_1}{G} \cdot \frac{ea_2}{G} \cdots \frac{ea_n}{G} = e^n.$$

(2) 抛物线反射性质：$\angle 1=\angle 3$



$$QF=QD,\ QR\perp FD.$$

(3) $A^B>B^A$，$e<A<B$

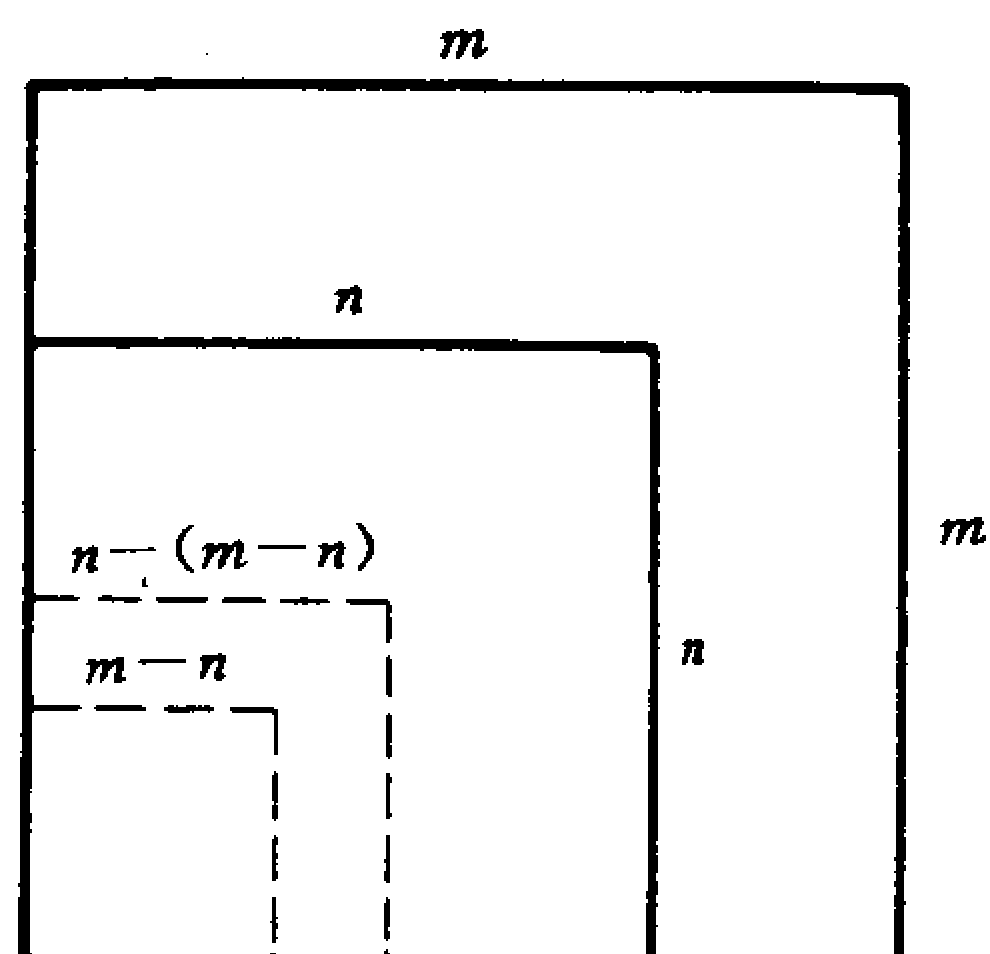


$$e\leqslant A<B\Rightarrow m_A>m_B\Rightarrow\frac{\ln A}{A}>\frac{\ln B}{B}.$$

（六）其　他

（1）

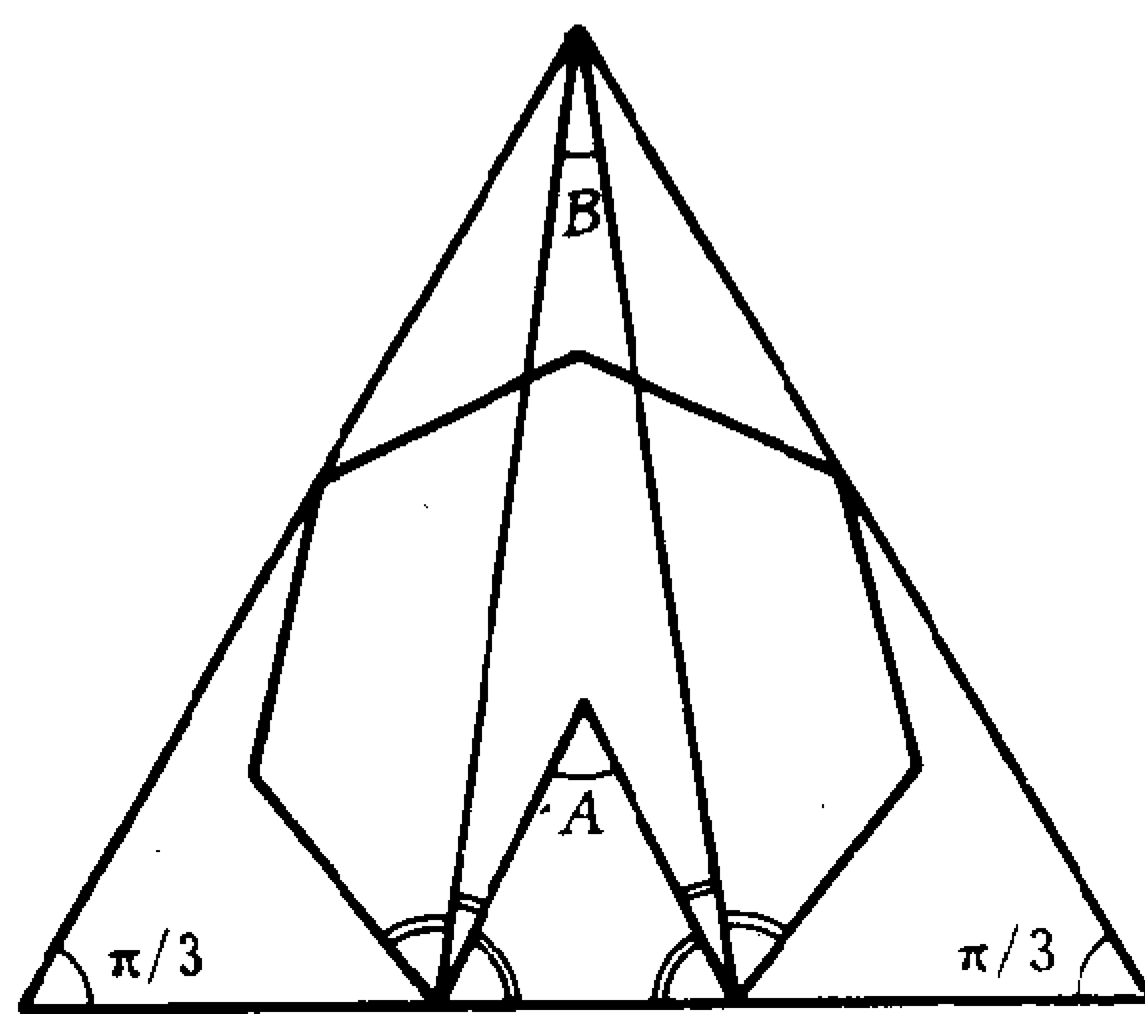
$\sqrt{2}$是无理数



若 $m^2 = 2n^2$，则$(2n-m)^2 = 2(m-n)^2$。

（2）

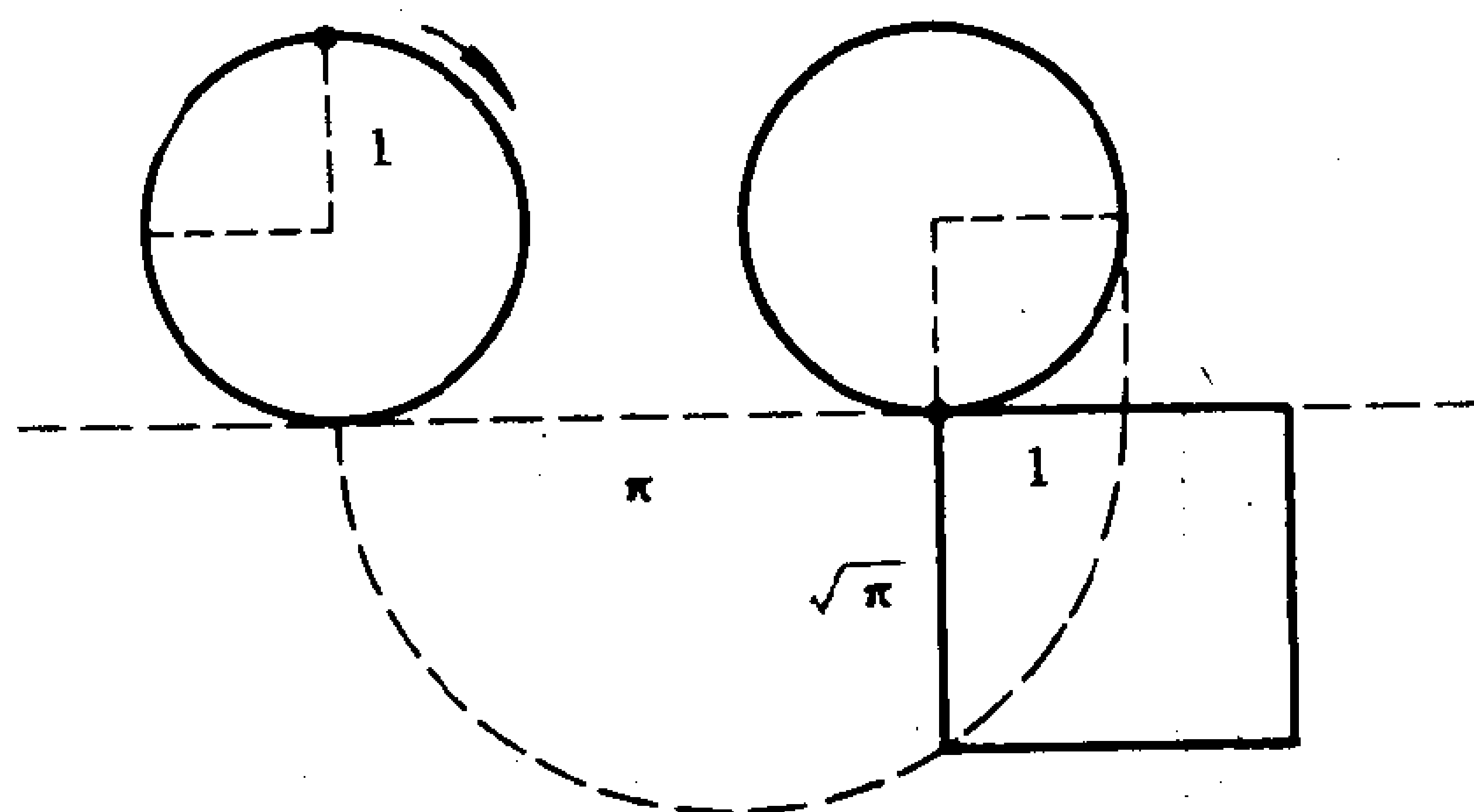
三等分角



若$\angle A = 2\pi/N$，$N = 6K \pm 1$，则$\angle B = \frac{1}{3}\angle A$。这里

三角形中的多边形为一正N边形.

(3) 化圆为方



数学归纳法[①]

I. S. Sominsky

§1 什么是数学归纳法

命题分一般命题和特殊命题。我们给出一般命题的几个例子：

任何一位苏联[②]公民都有受教育的权利。

每一个平行四边形对角线的交点平分对角线。

任何一个末位数为零的自然数必能被5整除。

与上述命题对应的特殊命题是：

彼特罗夫有受教育的权利。

平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点平分对角线。

140能被5整除。

从一般命题推出特殊命题称为演绎。考察下面的例子：

任何一位苏联公民都有受教育的权利。 (1)

彼特罗夫是苏联公民。 (2)

彼特罗夫有受教育的权利。 (3)

特殊命题(3)是由一般命题(1)借助于命题(2)得到的。

由特殊命题推得一般命题称为归纳。归纳可以导致正确

---

① 本文根据Mir Publishers Moscow 出版的《Little Mathematics Library》中的小册子《The Method of Mathematical Induction》(Translated from the Russian by Martin Greendlinger，1975)英文版译出。

② 苏联已于1991年12月27日正式宣布解体，为忠实于原文，本书仍称作苏联。——译者注

的结论，也可能导致错误的结论．我们举两个例子说明这一点．

140能被 5 整除．　　(4)

任何一个末位数为零的自然数必能被 5 整除．　　(5)

一般命题(5)是由特殊命题(4)得到的，命题(5)正确．

140能被 5 整除．　　(6)

任何一个三位数都能被 5 整除．　　(7)

一般命题(7)是由特殊命题(6)得到的，但命题(7)不正确．

由此产生一个问题：为了得到正确的结论，在数学中应该怎样使用归纳呢？本书就来回答这个问题．

1．首先考察运用归纳的两个例子，这种归纳在数学里是不允许的．

例 1　设

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

容易验证

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

根据上述结果，我们断言对任意自然数 n，有

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

例 2　考虑二次三项式 x^2+x+41，它曾引起 L.Euler 的注意。用 $x=0$ 代入，得到一个素数41，如果用 $x=1$ 代入，则又得到一个素数43。继续这个过程，在三项式中依次用 $x=2,3,4,\cdots,10$代入，相继得到素数 47,53,61,71,83,97,113,131,151。由此我们断言：用任何一个非负整数 x 代入这个二次三项式，必得到一个素数。

上面两个例子中的推理为什么在数学中是不允许的呢？所获得的结论什么地方是不合理的？

问题是，在上述两个例子中，我们只是依据命题对 n（或 x）的某些特殊值正确，就认为命题对任意的 n（例 2 中对任意 x）也都正确。

在数学中，归纳被广泛使用，但用时必须有技巧。对归纳的粗率态度会导致错误的结论。

例如，例 1 中给出的断言碰巧结论是正确的（在本节例 9 给出证明），而例 2 中的一般断言是错误的。

实际上，我们稍仔细地研究一下二次三项式 x^2+x+41 就会注意到：用 $x=0,1,2,\cdots,39$ 代入，它的值均为素数，但用 $x=40$ 代入时，其值等于 41^2，这是一个合数。

2. 在例 2 中我们偶然发现，一个命题对 x 的40个特殊值都成立，然而它对一般情形是错误的。

下面再举几个例子，其中的命题对特殊情形是正确的，但对一般情形不正确。

例 3　二项式 x^n-1（n 是自然数）曾引起数学家们的极大兴趣，它与几何中把圆周 n 等分的问题有密切的关系。因此曾对这个二项式进行了深入的研究。最使数学家们感兴趣的是把它分解为具有整系数因子的乘积。

对许许多多特殊的 n 值，考察 x^n-1 的分解式。数学家们发现：在分解式中，x 的各次幂的所有系数的绝对值都不超过 1 。实际上，

$$x-1=x-1,$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1),$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$
$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x-1)(x^2-x+1),$$

……………………………………………………

数学家们造出分解表，并且看到：在所造出的表中，分解式中 x 的各次幂的系数的绝对值都不超过 1 。他们由此推断：对一切的 n，分解式中 x 的各次幂的系数也具有这种性质。但试图证明这个结论的种种尝试都没有成功。

这个问题最后由 V. Ivanov 解决。他证明了，所有次数小于 105 的二项式 x^n-1 都具有所说的性质，但当 $n=105$ 时，$x^{105}-1$ 的一个分解因子是

$$\begin{aligned}&x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}\\&+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}\\&-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}\\&-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1,\end{aligned}$$

这表明它不具有所说的性质。

例 4 考察形如$2^{2^n}+1$的数。当 $n=0,1,2,3,4$ 时，

$$2^{2^0}+1=3,\quad 2^{2^1}+1=5,\quad 2^{2^2}+1=17,$$
$$2^{2^3}+1=257,\quad 2^{2^4}+1=65537,$$

它们均为素数．17世纪著名的法国数学家P．Fermat由此猜测：

一切形如$2^{2^n}+1$的数都是素数。可是到18世纪时另一位著名的数学家L. Euler却发现

$$2^{2^5}+1=4\ 294\ 967\ 297=641\cdot 6700417$$

是一个合数。

例5 17世纪著名的德国数学家，高等数学的创始人之一G. W. Leibniz证明了：对每一个正整数n，n^3-n能被3整除，n^5-n能被5整除，n^7-n能被7整除。据此他几乎猜想：对奇数k和任何自然数n，n^k-n能被k整除。但很快他自己就发现

$$2^9-2=510$$

不能被9整除。

例6 著名的苏联数学家D. A. Grave也曾犯过类似的错误。他提出猜想：$2^{p-1}-1$不能被p^2整除，这里p是任意的素数。直观的检验可以确认，对于任何小于1000的素数p，猜想成立。可是不久人们就发现$2^{1092}-1$能被1093^2(1093是素数）整除，这表明Grave的猜想是错误的。

例7 设有n个平面，都经过一公共点，其中任意三个平面都不经过同一条直线，问这n个平面把空间分成多少部分？

我们先考虑这个问题的一些最简单的情形。一个平面把空间分成两部分，过一公共点的两个平面把空间分成4部分，过一公共点且不经过同一条直线的三个平面把空间分成8部分。

乍看起来，当平面个数每增加一个时，空间被分割的部分数就成倍地增加。因此4个平面把空间分成16个部分，5个平面把空间分成32个部分，一般地，n个平面把空间分成

2^n个部分。

实际上，结果并非如此。例如，4个平面把空间分成14个部分，5个平面把空间分成22个部分。可以证明，n个平面把空间分成$n(n-1)+2$个部分（证明见§2例13）。

例8 我们再给出一个更令人信服的例子。

考察表达式$991n^2+1$，如果依次把$n=1,2,\cdots$代入，那么无论我们花费多少天（或多少年），也得不到一个完全平方数。然而，如果据此认为形如$991n^2+1$的数都不是完全平方数，那就错了。实际上，在形如$991n^2+1$的数中有完全平方数，只不过使它是一个完全平方数的那个最小的整数n非常之大。这个数是

$$n=12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767.$$

通过上述例子，我们得到一个简单而又重要的结论：

一个命题可能对一系列的特殊情况是正确的，但对一般情况并不正确。

3．现在，发生了如下问题：一个命题对几个特殊的情况是正确的，可是又无法检验所有可能的情况，那么怎样去判断它对一般情况是否正确呢？

借助于一种特殊的推理方法有时能圆满地回答这个问题，这种推理方法称为*数学归纳法*（完全归纳法）。

*数学归纳原理*是构成数学归纳法的基础。

数学归纳原理 如果一个命题满足：

（1）当$n=1$时，命题成立；

（2）设k是某个任意的自然数，假定由$n=k$时命题成立可推出$n=k+1$时命题成立，

那么，命题对所有的自然数n都成立。

证明① 用反证法。若不然，则存在一个自然数 m，使得：(i) 对 $n=m$ 命题不成立，(ii) 对每一个 $n<m$ 命题成立（换句话说，m 是使命题不成立的最小的自然数）。

由条件(1)知命题对 $n=1$ 成立，因此显然 $m>1$，$m-1$ 是一个自然数。由于 $m-1<m$，此时命题对 $m-1$ 成立，但对 m 不成立，这与条件(2)矛盾。证毕。

实际上，在证明数学归纳原理时我们用到了最小自然数原理：任意自然数集合必包含最小的自然数。容易看到，最小自然数原理又可作为数学归纳原理的推论而得到。因此这两个命题是等价的②。如果把它们中的一个作为定义自然数的公理集中的一条公理，那么另一个就成为一条定理。通常我们把数学归纳原理作为公理。

4. 建立在数学归纳原理基础上的证明称为用数学归纳法。这个证明必须由如下两部分组成，它们是两个独立的定理：

定理1 当 $n=1$ 时，命题成立。

定理2 假设当 $n=k$ 时命题成立，则当 $n=k+1$ 时命题也成立，这里的 k 是某个任意的自然数。

如果这两个定理都获得了证明，那么根据数学归纳原

---

① 读者可以跳过这一段直接阅读第4小段，不会对后文的理解产生困难。原因在于，在这里用于证明数学归纳原理的最小自然数原理本身一点也不比数学归纳原理更明显（或更不明显）。更深入的分析表明，只是在采用了别的假定之后，这两个命题实际上是等价的。因此，我们可以认为将数学归纳原理作为一个直观的、令人深信不移的假定。实际上，它是定义自然数的公理之一。进一步的细节见"后记"及其中提到的文献。

② 事实上，最小自然数原理与数学归纳原理是不等价的，上面给出的证明也是错误的。请参见本书的《关于数学归纳原理的一点注记》一文。——译者注

理，命题对所有的自然数 n 成立。

例 9 求和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

已经知道（见例 1）

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=\frac{3}{4},\ S_4=\frac{4}{5}.$$

现在我们不会重犯例 1 中出现的错误了，即不马上断言对所有的自然数 n，有

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

而是非常谨慎地说，经过对和 S_1,S_2,S_3,S_4 的检验后提出假设（猜想）$S_n=\frac{n}{n+1}$ 对所有自然数 n 成立。此外，我们还知道当 $n=1,2,3,4$ 时这个假设成立。下面用数学归纳法证实这个假设。

定理 1 当 $n=1$ 时，因为 $S_1=\frac{1}{2}$，所以假设成立。

定理 2 设 $n=k$ 时假设成立，即

$$S_k=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1},$$

其中 k 是某个自然数。要证明 $n=k+1$ 时，这个假设仍然成立，即

$$S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}.$$

事实上

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

因此，由定理条件得

$$S_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

两个定理都被证明。根据数学归纳原理，对所有自然数 n 有

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

注 1　必须强调：用数学归纳法给出的证明，要同时证明定理 1 和定理 2，缺一不可。

在例 2 中我们已经看到，对定理 2 的疏忽会导致怎样的结果。下面的例子说明，也不能忽视定理 1。

例10　定理　每一个自然数等于紧挨其后的自然数。

我们用没有定理 1 的“数学归纳法”给出证明。假定

$$k=k+1, \tag{8}$$

要证

$$k+1=k+2. \tag{9}$$

事实上，在等式(8)的两边各加上 1，就得到等式(9)。这表明，如果命题对 $n=k$ 成立，那么它对 $n=k+1$ 也成立。定理证毕。

推论　所有的自然数都相等。

推论的结果是荒谬的。那么错误出在哪里呢？问题在于：应用数学归纳原理时还必须要证明定理 1，但这里未给出证明，只单独证明了定理 2。实际上定理 1 不成立。

定理 1 和定理 2 各有自己特殊的含义。定理 1 产生归纳的基础。定理 2 给出无限度的自动推演这个基础的权利，从一种给定的情况推演到下一种情况，即从 n 推到 $n+1$。

如果不证明定理 1 而只证明定理 2（见例10），那么缺乏进行归纳的基础，因为实际上要推演的东西根本就没有，所以用定理 2 是无意义的。

如果不证明定理2而只证明定理1（见例1,2），那么虽然归纳的基础有了，但不能保证由归纳的基础所推演的结论完全正确。

注2 上面只是对最简单的情况分析了数学归纳法，至于较复杂的情况，定理1和定理2必须作适当的变化。

归纳法证明的第二部分，有时不仅建立在命题对$n=k$成立的基础上，而且还要涉及命题对$n=k-1$也要成立。这时证明中的第一部分必须验证命题对n的两个相继的初值成立。

有时候还会发生这样的情况：用归纳法证明的第二部分，要证明命题对某个自然数n成立，先要假定命题对所有小于n的自然数k成立。读者在下节将看到这种例子（见§2例7）。

有时候，命题并不要求对所有的自然数n成立，而只是要求对大于某个确定整数m的所有自然数n成立①。这时证明中的第一部分先要验证命题对$n=m+1$成立，如果需要，还可以多验证n的几个相继值。

5．为阐明数学归纳法的要点，我们再一次考察例1．

考察求和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

前面已算出

$$S_1=\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{2}{3},\quad S_3=\frac{3}{4},\quad S_4=\frac{4}{5},\cdots,$$

根据这些结果提出猜想：对所有的n，有

---

① 例如，任何涉及任意n边形的性质仅当$n\geqslant 3$才有意义。

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

必须用数学归纳法证实这个猜想．幸运的是，这个猜想与当初我们所提出的假设一致．如果当初给出的是一个错误的假设，那么，在前面例 9 中证明定理 2 时，错误肯定会早已被发现．

下面的例子说明，有时我们提出的猜 想 可 能 是不正确的，必须用数学归纳法进行检验．

例11 考虑求和

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

假设已分析过 S_n,进而提出猜想

$$S_n = \frac{n+1}{3n+1}. \tag{10}$$

由于$S_1 = \frac{1}{2}$，(10)式对$n=1$成立．假定(10)式对$n=k$成立，即

$$S_k = \frac{k+1}{3k+1}.$$

我们试图证明(10)式对 $n=k+1$ 也成立，即证明

$$S_{k+1} = \frac{k+2}{3k+4}. \tag{11}$$

由于

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{3k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^3+4k^2+8k+2}{(k+1)(k+2)(3k+1)}, \end{aligned}$$

所以这个结果不是我们要证明的(11)式。

这个例子表明，由假定(10)式对 $n=k$ 成立推不出当 $n=k+1$ 时(11)式成立。这时可以发现猜想是不正确的。

因此，数学归纳法允许人们检验在一般规律的研究中所提出的种种猜想，接受正确的，摈弃错误的。

为了学会如何应用数学归纳法，我们必须分析足够多的例子。

为了避免不断地重复"定理 1"和"定理 2"这两个短语，下面约定用记号1°和2°分别表示归纳证明中的第一部分和第二部分（这两部分构成了归纳原理的最基本的两个定理，对它们的证明等价于用归纳法）。此外，我们把例题与习题加以区分，例题给出详细的解答，而习题是让读者自己去做的。文末给出了习题的提示与解答。

§2　恒等式证明及算术性质的问题

例 1　按递增的顺序写出奇正数1,3,5,7,…，并记

$$u_1=1，u_2=3，u_3=5，u_4=7,\cdots。$$

问题是：如何利用下标 n，构造奇数 u_n 的表达式?

解　第一个奇数 u_1 可表为

$$u_1=2\cdot1-1; \tag{1}$$

第二个奇数 u_2 可表为

$$u_2=2\cdot2-1; \tag{2}$$

第三个奇数 u_3 可表为

$$u_3=2\cdot3-1. \tag{3}$$

仔细考察等式(1),(2),(3) 之后，我们可以提出猜想：用这个奇数下标的2倍再减去1就可得到任意一个奇数，即第 n

个奇数是

$$u_n = 2n - 1. \tag{4}$$

下面证明这个猜想是正确的。

1° 等式(1)表明公式(4)对 $n = 1$ 成立。

2° 假定公式(4)对 $n = k$ 成立，即第k个奇数有表达式

$$u_k = 2k - 1.$$

要证明公式(4)对第 $k + 1$ 个奇数有

$$u_{k+1} = 2(k + 1) - 1$$

或等价地证明

$$u_{k+1} = 2k + 1.$$

为得到第 $k + 1$ 个奇数，只要对第 k 个奇数加 2 ，即

$$u_{k+1} = u_k + 2.$$

但由假设 $u_k = 2k - 1$，因此

$$u_{k+1} = (2k - 1) + 2 = 2k + 1.$$

根据归纳原理，奇数 u_n 的表达式为

$$u_n = 2n - 1.$$

例 2 计算前 n 个奇数的和。

解 设所求的和为 S_n，即

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

这个问题在数学里有现成的求解公式。我们感兴趣的是不依靠任何现成的公式而用数学归纳法解这个问题。为此，首先需要构造猜想，即设法去猜一下这个问题的答案。

依次对 $n = 1, 2, 3, \cdots$求 S_n 的值，并尽可能多的多取一些n 的值，以便能做出比较可靠的猜想。剩下的事情就是用数学归纳法验证这个猜想。

我们有

$S_1 = 1$，$S_2 = 4$，$S_3 = 9$，$S_4 = 16$，$S_5 = 25$，$S_6 = 36$.

现在，事情依赖于求解者的观察力是否敏锐，以及他在特殊结果的基础上猜测出一般结果的能力.

容易看出：

$$S_1=1^2,\ S_2=2^2,\ S_3=3^2,\ S_4=4^2.$$

根据上述结果，一般可以假定

$$S_n=n^2.$$

现在来证明这个猜想是正确的.

1° 当 $n=1$ 时，求和是对单个数 1 求和，其和为 1，而表达式 n^2 也等于 1. 因此，当 $n=1$ 时猜想成立.

2° 假设当 $n=k$ 时猜想成立，即 $S_k=k^2$. 要证当 $n=k+1$ 时，猜想也成立，即证

$$S_{k+1}=(k+1)^2.$$

事实上，

$$S_{k-1}=S_k+(2k+1).$$

但由 $S_k=k^2$，因此

$$S_{k+1}=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

根据归纳原理，前 n 个奇数的和

$$S_n=n^2.$$

习题 1　设 $u_1=1$，并且对每个自然数 $k(k>1)$，有

$$u_k=u_{k-1}+3.$$

求 u_k 的表达式（提示 $u_1=3\cdot1-2$，$u_2=3\cdot2-2$.）.

习题 2　求和

$$S_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}.$$

（提示 $S_1=2-1$，$S_2=2^2-1$，$S_3=2^3-1$.）

例 3　证明：前 n 个自然数之和等于 $n(n+1)/2$.

解　这个问题与前面的例子不同，因为这里已经有结

论，所以不需要再去猜想，只须证明这个结论是正确的。

设所求之和记为 S_n，即

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

1° 当 $n = 1$ 时结论成立。

2° 设

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = k(k+1)/2,$$

要证

$$S_{k+1} = (k+1)(k+2)/2.$$

事实上，

$$\begin{aligned} S_{k+1} = S_k + (k+1) &= k(k+1)/2 - (k+1) \\ &= (k+1)(k+2)/2. \end{aligned}$$

问题获证。

例 4 证明：前 n 个自然数的平方和等于

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

解 记 $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

1° $S_2(1) = 1^2 = \dfrac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

2° 假定

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

那么

$$\begin{aligned} S_2(n+1) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2. \end{aligned}$$

化简后得到

$$S_2(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

例 5 证明

$$S_n = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

解 1° 当 $n=1$ 时结论显然成立（因为$(-1)^0=1$）。

2° 设

$$S_k = 1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}.$$

我们要证

$$S_{k+1} = 1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2$$
$$= (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

事实上，

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k(k+1)^2$$
$$= (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2$$
$$= (-1)^k\left[(k+1) - \frac{k}{2}\right](k+1)$$
$$= (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

习题 3 证明

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

习题 4 证明

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

习题 5 证明

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\ (x \neq 1).$$

例 6 证明

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

解 1° 当 $n=1$ 时，有 $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$.

2° 如果

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

那么

$$\begin{aligned}&1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n+n(n+1)\\&=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+n(n+1)\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.\end{aligned}$$

如果注意到

$$\begin{aligned}&1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n\\&=1(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+\cdots\\&\quad+(n-1)[(n-1)+1]\\&=[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]+[1+2+\cdots\\&\quad+(n-1)],\end{aligned}$$

那么从例 3 和例 4 的结果可证得例 6 的结论.

习题 6　证明

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

习题 7　证明

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

习题 8　证明

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

习题9 证明

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

习题10 证明

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

习题11 证明

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$$

$$=\frac{n}{a(a+n)}.$$

例7 设 $v_0=2$，$v_1=3$，并且对每一个自然数 k，有

$$v_{k+1}=3v_k-2v_{k-1},$$

证明：$v_n=2^n+1$。

解 1° 由题目所给的假设知道，当 $n=0$ 和 $n=1$ 时命题成立。

2° 假设 $v_{k-1}=2^{k-1}+1$，$v_k=2^k+1$，那么

$$v_{k+1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)=2^{k+1}+1.$$

习题12 设

$$u_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},\qquad u_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}(\alpha\neq\beta),$$

并且对所有的自然数 $k(k>2)$，有

$$u_k=(\alpha+\beta)u_{k-1}-\alpha\beta u_{k-2},$$

证明

$$u_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

例8　计算

$$S_n=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!.$$

（通常把乘积 $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$ 记为 $n!$，读作“n 阶乘”．我们要记住几个重要的值：

$$1!=1,\ 2!=2,\ 3!=6,\ 4!=24,\ 5!=120)$$

解　$S_1=1\cdot 1!=1,\quad S_2=1\cdot 1!+2\cdot 2!=5,$

$$S_3=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!=23,$$

$$S_4=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4!=119.$$

考察这些结果，我们会注意到

$$S_1=2!-1,\quad S_2=3!-1,$$

$$S_3=4!-1,\quad S_4=5!-1.$$

这就可能产生猜想

$$S_n=(n+1)!-1.$$

下面证实这个猜想．

1°　因为 $S_1=1\cdot 1!=2!-1$，所以当 $n=1$ 时猜想正确．

2°　设

$$S_k=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1.$$

要证明

$$S_{k+1}=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!$$
$$=(k+2)!-1.$$

事实上，

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=[(k+1)!-1]+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=(k+1)![1+(k+1)]-1\\&=(k+1)!(k+2)-1\\&=(k+2)!-1.\end{aligned}$$

习题13　证明恒等式

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

例 9 ① 假定 $\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=a$，

$$A_2=m-\frac{a}{m-1},$$

$$A_3=m-\frac{a}{m-\dfrac{a}{m-1}},\qquad A_4=m-\frac{a}{m-\dfrac{a}{m-\dfrac{a}{m-1}}},$$

…，一般地，对 $k>1$ 有

$$A_{k+1}=m-\frac{a}{A_k}\quad(m\neq1,\ \alpha\neq\beta).$$

由此证明

$$A_n=\frac{(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha^n-\beta^n)-(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}. \tag{5}$$

解 1° 首先证明公式(5)对 $n=2$ 成立．根据假定，

$$A_2=m-\frac{a}{m-1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)-1}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}.$$

由此式就有

$$A_2=\frac{(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)}.$$

这是因为上面的分式约去因子$(\alpha-\beta)$后得

$$A_2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}.$$

① 本例对 $m\neq1$，$\alpha=\beta$的情形，$A_n=\dfrac{(n+1)\alpha^2-n\alpha}{n\alpha-(n-1)}$．——译者注

2° 假设公式(5)对 $n=k$ 成立，即

$$A_k=\frac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}{(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})}. \tag{6}$$

要证明公式(5)对 $n=k+1$ 也成立，即证明

$$A_{k+1}=\frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}.$$

事实上，

$$A_{k+1}=m-\frac{a}{A_k} \text{ 或 } A_{k+1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta}{A_k}.$$

利用等式（6），我们有

$$A_{k+1}=(\alpha+\beta)-\frac{\alpha\beta[(\alpha^k-\beta^k)-(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})]}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}$$

$$=\frac{(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})-(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})-(\alpha^k-\beta^k)}.$$

结论获证。

习题14 化简多项式

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

解答 $(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$.

例10 证明：任何一笔超过 7 卢布的整数款，都可用面额为 3 卢布和 5 卢布的钱付清而不需要其它面额的钱币。

解 1° 当这笔款是 8 卢布时，命题正确(因为 8 卢布 = 3 卢布 + 5卢布)。

2° 假设命题对 $k(k\geqslant 8)$ 卢布的整数款成立，那么可能发生两种情况：(1) 这笔 k 卢布的款只用 3 卢布的钞票就可付清；(2) 在支付这笔 k 卢布的款时至少要用到一张 5 卢布的钞票。

在第一种情况，因为此时$k>8$，所以至少有三张3卢布的钞票。为了支付$k+1$卢布，只需用两张5卢布的钞票去换下那笔k卢布款中的三张3卢布的钞票就可以了。

在第二种情况，为支付$k+1$卢布，只需用两张3卢布的钞票去替换那笔k卢布中的一张5卢布的钞票即可。

例11 试证明：任意三个相邻自然数的立方和必能被9整除。

证明 1° 因为$1^3+2^3+3^3$能被9整除，所以命题对首数为1的三个相邻自然数成立。

2° 设$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$能被9整除，其中k是某个自然数。考察和

$$\begin{aligned}&(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3\\&\quad=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27\\&\quad=[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+9(k^2+3k+3),\end{aligned}$$

上式是两个加数相加，每个加数都能被9整除，故其和能被9整除。

习题15 证明

$$A_n=11^{n+2}+12^{2n+1}$$

能被133整除，其中$n\geqslant 0$为整数。

例12 在$2n$个自然数$1,2,3,\cdots,2n$中任意选取$n+1$个数，证明：在所选取的$n+1$个数中至少有两个数，其中一个可被另一个整除。

证明 1° 当$n=1$时，只有两个自然数1,2，命题成立。

2° 假设从$2n$个自然数$1,2,3,\cdots,2n$中能够选取$n+1$个数（$n\geqslant 2$），使得这$n+1$个数两两都不能互相整除。为简明起见，用M_{n+1}记由这$n+1$个数组成的集合。下面要证明：从$2(n-1)$个数$1,2,3,\cdots,2n-2$中也能够选取n个数，使得

它们两两不能互相整除。

可能发生四种情况：

(1) $2n-1\notin M_{n+1}$且 $2n\notin M_{n+1}$；

(2) $2n-1\in M_{n+1}$且 $2n\notin M_{n+1}$；

(3) $2n\in M_{n+1}$且 $2n-1\notin M_{n+1}$；

(4) $2n-1\in M_{n+1}$且 $2n\in M_{n+1}$。

第一种情况　从 M_{n+1}中剔除某个数，则M_{n+1}还剩下 n 个数，其中每个数$\leqslant 2n-2$，它们两两不能互相整除。

第二种情况　从 M_{n+1}中剔除元素$2n-1$，则剩下 n 个数，其中每个数$\leqslant 2n-2$，这些数两两不能互相整除。

第三种情况　从 M_{n+1}中剔除元素 $2n$，也得到同样的结果。

第四种情况　首先注意到数 $n\notin M_{n+1}$。因为否则 M_{n+1}中将有两个数（n 和$2n$），其中一个可被另一个整除。

从M_{n-1}中剔除$2n-1$和$2n$两个数，并把由剩下的数组成的集合记为 M'_{n-1}。把数 n 添入 M'_{n-1}，记为 M_{n-1}，则M_{n-1}包含 n 个数且每个数 $\leqslant 2n-2$。我们要证明：M_{n-1}中的 n 个数两两不能互相整除。

在 M_{n+1}中不包含这样的两个数，其中之一可被另一个整除。因此，M'_{n-1}也不包含这样的两个数。剩下的工作是证明：把数 n 添入 M'_{n-1}后，M_{n-1}仍不包含这样的两个数。为此，只要证明：

(i) 在 M'_{n-1}中不包含能被 n 整除的数。

(ii) n 也不能被属于 M'_{n-1}的任何一个数整除。

由于 M_{n-1}中的数不大于 $2n-2$，因此推出 (i)成立。又根据 $2n$ 不能被 M'_{n-1}中的任何一个数整除，推出(ii)成立。

因此，如果我们假定命题对$2n$ 个数$1,2,\cdots,2n$ 的情形不

成立，那么它对 $2(n-1)$ 个数 $1,2,\cdots,2n-2$ 的情形也不成立。如此递推，最后推至命题对只有 1,2 两个自然数的情形也不成立，与1°矛盾。由此可知，如果命题对 $2(n-1)$ 个数 $1,2,\cdots,2n-2$ 的情形成立，那么它对 $2n$ 个数 $1,2,\cdots,2n$ 的情形也必成立。

从2°和1°推出命题对 $2n$ 个数 $1,2,\cdots,2n$ 的情形成立，这里 n 是任意的自然数。

注 这个问题还有下面的简单解法：

在 $2n$ 个数 $1,2,\cdots,2n$ 中任意选取 $n+1$ 个数，它们组成的集合记为 M_{n+1}。用 2 的幂去除 M_{n+1} 中的偶数，使其商为奇数。这些奇数与 M_{n-1} 中原有的奇数组成的集合记为 M'_{n+1}。集合 M'_{n+1} 包含 $n+1$ 个奇数，其中每一个奇数都小于 $2n$。因为小于或等于 $2n$ 的奇数只有 n 个，所以在集合 M'_{n+1} 中至少有两个奇数相等，记这两个相等的奇数为 k。这就说明集合 M_{n+1} 中包含两个数 $2^s k$ 和 $2^t k$（其中 s 和 t 可能有一个是零），其中之一可被另一个整除。

习题16① 试证：平面上过一公共点的 n 条不同直线把平面分成 $2n$ 个部分。

例13 试证：过一公共点且任何三个平面都不过一条公共直线的 n 个平面把空间分成

$$A_n = n(n-1)+2$$

个部分。

证明 1° 当 $n=1$ 时，一个平面把空间分成两个部分，$A_1=2$。命题成立。

2° 假设命题对 $n=k$ 成立，即假设 k 个平面把空间分成

① 习题16和例13与几何问题有关，它们归入这一节主要是由于其本质上的纯算术性质。

$k(k-1)+2$个部分。我们要证明$k+1$个平面把空间分成

$$k(k+1)+2$$

个部分。

事实上，设P是第$k+1$个平面．P与先前的k个平面中的每个平面都相交，其交线是一条直线．因此平面P被过一公共点的k条不同直线分成若干个部分．由习题16我们可以断言：平面P被分为$2k$个部分，其中的每一部分是以该公共点为顶点的平面角。

先前的k个平面把空间分成若干个多面角．这些多面角中有一些被平面P分为两部分．这两个部分的公共面，就是由平面P与该多面角的面相交所截两条射线所范围的平面部分，也即P被分成的$2k$个平面角之一。

这表明，被平面P分成两部分的这种多面角的个数$\leqslant 2k$.

另一方面，平面P被分成$2k$个部分，这$2k$个部分是平面P与先前的k个平面相交而成的，由于任意三个平面不共线，所以其中的每一部分是两个新的多面角的公共面．因此它把由先前k个平面构成的一部分多面角中的每一个分成了两部分。

这说明被平面P分成两部分的这种多面角的个数不能小于$2k$个。

因此，由先前的k个平面所构成的空间被平面P分成两部分的恰有$2k$个部分．从而，由假设k个平面把空间分成

$$k(k-1)+2$$

个部分，那么$k+1$个平面就把空间分成

$$[k(k-1)+2]+2k=k(k+1)+2$$

个部分．命题得证。

§3　三角问题与代数问题

例 1　证明恒等式

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cdots\cos2^{n}\alpha=\frac{\sin2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

证明　1°　当 $n=0$ 时，因为 $\cos\alpha=(\sin2\alpha)/(2\sin\alpha)$，所以恒等式成立。

2°　假设当 $n=k$ 时恒等式成立，即

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cdots\cos2^{k}\alpha=\frac{\sin2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha},$$

那么，当 $n=k+1$ 时恒等式也成立。事实上，

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cdots\cos2^{k}\alpha\cos2^{k+1}\alpha=\frac{\sin2^{k+1}\alpha\ \cos2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}.$$

例 2　设 $A_1=\cos\theta$，$A_2=\cos2\theta$，且对所有的自然数 $k(k>2)$，有

$$A_k=2\cos\theta A_{k-1}-A_{k-2},$$

试证 $A_n=\cos n\theta$。

证明　1°　当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，结论成立。

2°　设 $A_{k-2}=\cos(k-2)\theta$，$A_{k-1}=\cos(k-1)\theta$，则

$$A_k=2\cos\theta\cos(k-1)\theta-\cos(k-2)\theta=\cos k\theta.$$

例 3　证明

$$\sin x+\sin2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}.$$

解　1°　当 $n=1$ 时，结论成立。

2° 设

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin kx=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2},$$

那么

$$\begin{aligned}&\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin kx+\sin(k+1)x\\&=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}+\sin(k+1)x\\&=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}+2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x\\&=\frac{\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{k+1}{2}x,\end{aligned}$$

其中用到了

$$2\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{k+2}{2}x-\sin\frac{kx}{2}.$$

习题17　证明

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

习题18　证明

$$\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\cdots+n\sin nx=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

习题19 证明

$$\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\cdots+n\cos nx$$
$$=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

习题20 证明

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x\quad(x\neq m\pi).$$

习题21 证明

$$\operatorname{arc\,cot}3+\operatorname{arc\,cot}5+\cdots+\operatorname{arc\,cot}(2n+1)$$
$$=\operatorname{arc\,tan}2+\operatorname{arc\,tan}\frac{3}{2}+\cdots+\operatorname{arc\,tan}\frac{n+1}{n}$$
$$-n\operatorname{arc\,tan}1.$$

例 4 证明

$$(1+\mathrm{i})^n=2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

证明 1° 结论对 $n=1$ 时成立，这是因为

$$1+\mathrm{i}=2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2° 设

$$(1+\mathrm{i})^k=2^{k/2}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{4}\right),$$

那么

$$(1+\mathrm{i})^{k+1}=2^{k/2}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{4}\right)2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2^{(k+1)/2}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{(k+1)\pi}{4}\right).$$

习题22 证明

$$(\sqrt{3}-\mathrm{i})^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{6}\right).$$

例5 试证明定理：

假设数 u 是由复数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 经过有限次算术运算(即加、减、乘、除）得到的，那么它的共轭数 $\bar{u}$ 也必是由共轭复数 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 经过相同的运算而得到的。

证明 1° 首先证明，对 $n=2$ 的情形定理成立。不妨只考虑加法的情形。设

$$x_1=a+b\mathrm{i},\qquad x_2=c+d\mathrm{i},$$

则

$$x_1+x_2=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}=u,$$
$$\bar{x}_1+\bar{x}_2=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}=\bar{u}.$$

2° 设 u 由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的有理式表出。熟知的是，这个表达式可通过有限次计算得到，其中的每一步只对两个复数作一次算术运算。例如，设 $u=(x_1x_2+x_3x_4)/(x_1+x_2-x_3)$。为得到 u，只需做下面几次运算：

(1) $x_1x_2=u_1$, (2) $x_3x_4=u_2$,

(3) $x_1+x_2=u_3$, (4) $u_3-x_3=u_4$,

(5) $u_1+u_2=u_5$, (6) $u_5/u_4=u$.

假设命题对“运算”次数不超过 k 次的所有表达式正确，其中的“运算”是指对两个复数作一次加、减、乘或除法运算。要证明命题对需要作 $k+1$ 次“运算”的所有表达式也正确。

事实上，最后的第 $k+1$ 次“运算”是对 u_i 和 u_j 做的，而 u_i 和 u_j 是用不多于 k 次的“运算”得到的。因为在运算过程中如果用 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 分别代换 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则得 u_i,u_j 的共轭数 $\bar{u}_i,\bar{u}_j$，又因为对 u_i,u_j 作第 $k+1$ 次“运算”后得数

u. 因此对 $\bar{u}_i, \bar{u}_j$ 作第 $k+1$次"运算"后必得 u 的共轭数$\bar{u}$.

习题23　试证：对任意自然数 n，有

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx.$$

§4　证明不等式

例1　试证：对任意自然数$n>1$，有

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

证明　记不等式左边的和为S_n.

1°　由$S_2=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$知，当$n=2$时不等式成立.

2°　设 $S_k>\frac{13}{24}$，要证$S_{k+1}>\frac{13}{24}$. 由于

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k},$$

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

把两式相减得

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1};$$

即

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

上面等式的右边对任意 k 都大于零，因此 $S_{k+1}>S_k$. 又由假设知 $S_k>\frac{13}{24}$，因此$S_{k+1}>\frac{13}{24}$. 命题证毕.

习题24　指出下面命题证明中的错误.

命题　对所有的自然数 n，有$2^n>2n+1$.

证明 假设命题对 $n=k$ 时成立（k 为自然数），即

$$2^k>2k+1. \qquad (1)$$

要证明当 $n=k+1$ 时，有

$$2^{k+1}>2(k+1)+1. \qquad (2)$$

事实上，对任意一个自然数 k 有 $2^k\geqslant 2$。把 2^k和 2 分别加到不等式(1) 的左边和右边得

$$2^k+2^k>2k+1+2,$$

即

$$2^{k+1}>2(k+1)+1.$$

命题得证。

习题25 对怎样的自然数 n，不等式

$$2^n>2n+1$$

成立？

例 2 对怎样的自然数 n，不等式

$$2^n>n^2$$

成立？

解 当 $n=1$时，因为$2^1>1^2$，所以不等式成立；当$n=2$时，因为$2^2=2^2$，所以不等式不成立；当 $n=3$时，因为 $2^3<3^2$，所以不等式不成立；当 $n=4$时，因为 $2^4=4^2$，所以不等式不成立；当 $n=5$时，因为$2^5>5^2$，所以不等式成立；当 $n=6$时，因为$2^6>6^2$，所以不等式成立．观察上述结果，不等式似乎对$n=1$和$n>4$的情况成立．下面证明这个结论．

1° 当 $n=5$ 时命题成立。

2° 设

$$2^k>k^2, \qquad (3)$$

其中 k 是大于 4 的自然数。

现在要证

$$2^{k+1}>(k+1)^2. \tag{4}$$

由习题25可知，$2^k>2k+1(k>4)$，因此，如果把2^k和$2k+1$分别加到不等式(3)的左边和右边，就得到不等式(4)成立。

因此，当$n=1$和$n>4$时，不等式$2^n>n^2$成立。

例 3 证明

$$(1+a)^n>1+na,$$

其中$a>-1$，$a\neq0$且 n 是大于 1 的自然数。

证明 1° 当 $n=2$时，由于 $a>0$，故不等式成立。

2° 假设当 $n=k$ 时，有

$$(1+a)^k>1+ka, \tag{5}$$

要证当 $n=k+1$ 时，有

$$(1+a)^{k+1}>1+(k+1)a. \tag{6}$$

事实上，由 $1+a>0$ 及假设得

$$(1+a)^{k+1}=(1+a)^k(1+a)>(1+ka)(1+a). \tag{7}$$

（7）式又可写成

$$(1+a)^{k+1}>1+(k+1)a+ka^2.$$

右边舍去正数ka^2，就得不等式(6)，命题得证。

习题26 证明：对任意自然数$n>1$，有

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

习题27 证明：对任意自然数$n>1$，

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

例 4 证明

$$2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n, \tag{8}$$

其中 $a+b>0$，$a\neq b$，n 是大于 1 的自然数。

证明 1° 当$n=2$时，不等式（8）即为

$$2(a^2+b^2)>(a+b)^2. \tag{9}$$

由 $a\neq b$ 及不等式

$$(a-b)^2>0, \tag{10}$$

容易推出(9)式成立，这只要在(10)式两边同时加上 $(a+b)^2$ 即可。所以当$n=2$时不等式成立。

2° 假设当 $n=k$ 时，不等式 (8)成立，即

$$2^{k-1}(a^k+b^k)>(a+b)^k. \tag{11}$$

我们要证当$n=k+1$时，不等式(8)也成立，即证

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>(a+b)^{k+1}. \tag{12}$$

(11) 式两边同乘 $(a+b)$，由条件 $(a+b)>0$得

$$2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)>(a+b)^{k+1}. \tag{13}$$

为了证明 (12) 式成立，只要证明

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b) \tag{14}$$

或等价于证明

$$a^{k+1}+b^{k+1}>a^kb+ab^k. \tag{15}$$

而不等式 (15) 又等价于不等式

$$(a^k-b^k)(a-b)>0. \tag{16}$$

如果 $a>b$，则有 $a^k>b^k$，因此不等式(16) 的左边是两个正数的乘积。如果 $a<b$，则有 $a^k<b^k$，因此不等式(16)的左边是两个负数的乘积。于是不等式(16)成立。这表明：由假设当 $n=k$ 时不等式(8)成立推出 $n=k+1$ 时它也成立。命题成立。

例 5 试证，对任意$x>0$及自然数 n，有

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1. \tag{17}$$

证明 1° (a) 由不等式 $(x-1)^2\geqslant 0$知，当 $x>0$时有

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2. \tag{18}$$

所以当$n=1$时不等式（17）成立。

（b）当$n=2$时，不等式（17）的左边是

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1.$$

由(18)式得

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 2^2-1=3.$$

因此，当$n=2$时不等式（17）成立。

2° 假设不等式（17）对$n=k$成立，即

$$x^k+x^{k-2}+\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1. \qquad (19)$$

我们要证(17)对$n=k+2$也成立，即证

$$x^{k+2}+x^k+x^{k-2}+\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+3. \qquad (20)$$

在(18)中用x^{k+2}代换x得

$$x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant 2. \qquad (21)$$

把不等式(21)和(19)的两边对应相加，就得到不等式(20)。

我们给出总结：

在1°中的(a)和(b)已证明了不等式(17)对$n=1,2$成立。

在2°中已证明了，如果不等式(17)对$n=k$成立，则它对$n=k+2$也成立。换句话说，2°可使我们正确地从$n=k$推演到$n=k+2$。

把1°中的(a)与2°结合起来，可推出不等式(17)对所有的奇数n成立。同样，把1°中的(b)与2°结合起来可知(17)对所有的偶数n成立。综合起来得，不等式(17)对所有的自然数n成立。

例 6 证明：正数的几何平均值不大于它们的算术平均值，即设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正数，则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}. \tag{22}$$

证明 1° 当 $n=2$ 时不等式(22)即为

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}. \tag{23}$$

这可由 $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant 0$ 容易证得．所以对两个正数 a_1 和 a_2 的情形，不等式(22)成立．

不等式(22)有简明的几何意义．在直线 AB 上画出两条相邻的线段，它们的长度分别为 a_1 和 a_2．以 a_1+a_2 为直径作半圆（见图 1）．那么 $(a_1+a_2)/2$ 是圆的半径，而 $\sqrt{a_1a_2}$ 是经过这两条线段的公共端点且与它们垂直的弦的长度的一半，由此看出不等式(23)成立．

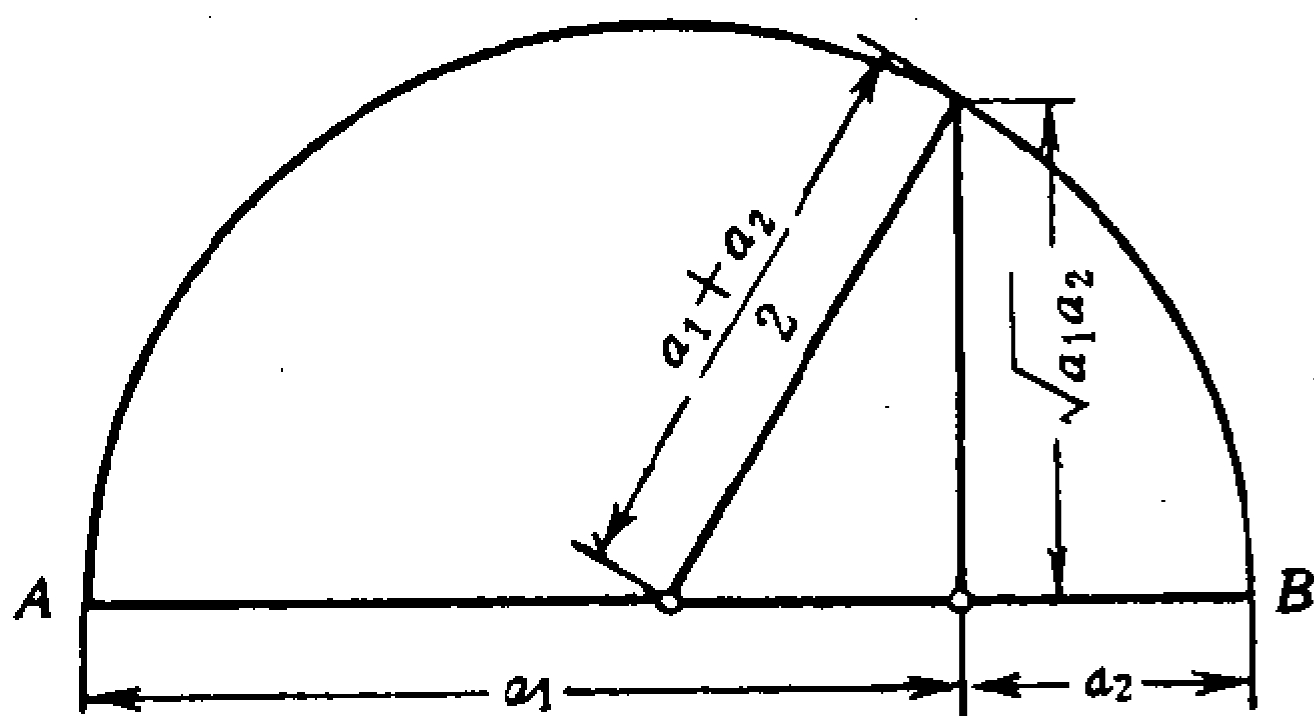


图 1

2° 假设不等式(22)对 $n=k$ 成立，要证它对 $n=2k$ 也成立．事实上，

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}}=\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}}$$
$$\leqslant\frac{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}\cdots a_{2k}}}{2}$$

$$\leqslant \frac{\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} + \dfrac{a_{k+1} + \cdots + a_{2k}}{k}}{2}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{2k}}{2k}.$$

由于已证明不等式(22)对 $n=2$ 成立，因此可得，不等式(22)对 $n=4,8,16,\cdots$，即对 $n=2^s$ 成立，其中 s 是自然数。

3° 为了证明不等式(22)对所有的自然数 n 成立，下面将证明，如果不等式(22)对 $n=k\geqslant 3$ 成立，那么它对 $n=k-1$ 也成立。

为此，设 $a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}$ 是任意的 $k-1$ 个正数，λ 是一个待定的正数，那么有

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}\lambda} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \lambda}{k}.$$

选择 λ，使得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \lambda}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1},$$

从中解出

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}.$$

我们有

$$\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})}{k-1}}$$

$$\leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1},$$

或

$$\sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}.$$

现设 m 是任意的一个自然数。如果 $m=2^s$，那么按照

2°，不等式(22)对 m 成立；如果 $m \neq 2^s \geqslant 3$，则可以找到一个 s，使得 $m < 2^s$，按照 2° 和 3° 我们断言不等式(22)对 $n = m$ 成立。

§5 用数学归纳法证明初等代数中的定理

定理 1 一个多项式的平方等于它所有各项的平方和加上所有各项交叉乘积之和的二倍，即

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n). \tag{1}$$

证明 1° 直接相乘就可验证公式(1)对 $n = 2$ 成立。

2° 假定公式(1)对 $n = k - 1$ 成立，即

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + 2S,$$

其中 S 是以 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 为因子的所有可能的各项交叉乘积之和。我们要证明

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + a_k^2 + 2S_1,$$

其中 S_1 是以 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k$ 为因子的所有可能的各项交叉乘积之和，即

$$S_1 = S + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) \cdot a_k.$$

事实上，

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k)^2 &= [(a_1 + \cdots + a_{k-1}) + a_k]^2 \\ &= (a_1 + \cdots + a_{k-1})^2 + 2a_k(a_1 + \cdots + a_{k-1}) + a_k^2 \\ &= a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + 2S + 2a_k(a_1 + \cdots + a_{k-1}) + a_k^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + a_k^2 + 2S_1.\end{aligned}$$

定理 2 等差级数第 n 项的通项公式是

$$a_n = a_1 + d(n-1), \tag{2}$$

其中 a_1 是首项， d 是公差。

证明 1° 公式(2)对 $n=1$ 显然成立。

2° 假定公式(2)对 $n=k$ 成立，即

$$a_k = a_1 + d(k-1),$$

那么

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk,$$

即公式(2)对 $n=k+1$ 也成立。定理得证。

定理 3 几何级数的第 n 项通项公式是

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \tag{3}$$

其中 a_1 是首项， q 是公比。

证明 1° 公式(3)对 $n=1$ 显然成立。

2° 设

$$a_k = a_1 q^{k-1},$$

那么

$$a_{k+1} = a_k \cdot q = a_1 q^k.$$

定理 4 m 个元素全排列个数是

$$P_m = m!\ . \tag{4}$$

证明 1° 首先注意到 $P_1 = 1$，因此公式(4)对 $m=1$ 成立。

2° 设 $P_k = k!$，要证明

$$P_{k+1} = (k+1)!\ .$$

对于给定的 $k+1$ 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$，先取前 k 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 并用它们构成所有可能的全排列，由归纳假设总共组成 $k!$ 个排列。

在上述 $k!$ 个排列中，任取其中的一个，把元素 a_{k+1} 依次放在这个排列的第 1 个元素的前面，放在第 2 个元素的前面，…，放在第 k 个元素的前面，最后把它放在第 k 个元素

的后面．用这种方法从 k 个元素的一种排列可得到 $(k+1)$ 个元素的 $k+1$ 种全排列．当取遍所有的 $k!$ 个排列后，按此规则得

$$k!(k+1)=(k+1)!$$

种 $k+1$ 个元素的全排列．

但是还必须研究：

(1) 在 $(k+1)!$ 种排列中是否有两个排列是相同的？

(2) 是否已得到所有可能的 $k+1$ 个元素的全排列？

假若所得到的 $(k+1)!$ 种排列中有两个是相同的，不妨称之为 p_1,p_2．设 a_{k+1} 位于 p_1 中从左往右数的第 s 个位置上，那么 a_{k+1} 在 p_2 中也位于从左往右数的第 s 个位置上．

从 p_1 和 p_2 中去掉 a_{k+1}，我们得到两个相同的 k 个元素全排列 $\bar{p}_1$ 和 $\bar{p}_2$．

这就表明：为了得到 p_1 和 p_2，我们在由 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 构成的同一个排列中，将元素 a_{k+1} 在同一位置上放置了两次．但这与前面所说的排列的构成规则相矛盾．

另一方面，假若漏掉了某个 $k+1$ 个元素的全排列 p．设 a_{k+1} 在 p 中占据第 s 个位置．从 p 中去掉 a_{k+1}，得到 k 个元素的全排列 $\bar{p}$．于是，为了得到 p，只须把 $\bar{p}$ 取来并将元素 a_{k+1} 放在从左往右数的第 s 个位置上．

不可能漏掉 $\bar{p}$，因为我们已经取遍前 k 个元素的所有全排列，故一定取到过 $\bar{p}$．与此同时，我们肯定已将元素 a_{k+1} 放在了它在 p 中应占据的位置上，因为 a_{k-1} 是按规则对排列 $\bar{p}$ 放置的．

综上所述，我们所构造的全排列是互不相同的，并且包括了 $k+1$ 个元素的所有全排列．由此得到

$$P_{k+1}=(k+1)!.$$

由归纳法原理知(4)式对任意的自然数 m 成立。

定理 5　从 m 个元素中一次取出 n 个元素的排列数是

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1). \qquad (5)$$

证明　1° 首先注意到 $A_m^1 = m$，因此等式(5)对 $n=1$ 成立。

2° 假定

$$A_m^k = m(m-1)\cdots(m-k+1),$$

其中 $k<m$。要证明

$$A_m^{k+1} = m(m-1)\cdots(m-k+1)(m-k).$$

为了得到从 m 个元素中一次取出 $k+1$ 个元素的所有排列，只须先把从 m 个元素中一次取出 k 个元素的所有排列列出来，然后在每一个排列的尾部添加上剩下的 $m-k$ 个元素之一，那么共有 $m-k$ 种添加法。这样，从 m 个元素中一次取出 $k+1$ 个元素的排列两两不相同。而且，从 m 个元素中一次取出 $k+1$ 个元素的每一个排列都已包含在我们所构造的排列中①．这就表明

$$A_m^{k+1} = A_m^k(m-k) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(m-k).$$

定理 6　m 个元素中一次取出 n 个元素的组合数为

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}. \qquad (6)$$

证明　1° 首先注意到 $C_m^1 = m$，因此(6)式对 $n=1$ 成立。

2° 假定当 $n=k$ 时，

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}.$$

要证当 $n=k+1$ 时，

① 请读者如同定理 4 一样补出这一点的详细证明。——译者注

$$C_m^{k-1}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k(k+1)}.$$

为得到从 m 个元素中一次取出 $k+1$ 个元素的所有组合，先列出从 m 个元素中一次取出 k 个元素的所有组合，然后对每个组合添加上剩下的 $m-k$ 个元素之一作为该组合的第 $k+1$ 个元素。显然，用这种方法可以得到从 m 个元素中一次取出 $k+1$ 个元素的所有组合，而且每个这样的组合出现 $k+1$ 次。

事实上，当把 a_1 添加到组合 $a_2,a_3,\cdots,a_k,a_{k+1}$ 中时，得到组合 $a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}$。当把 a_2 添加到组合 $a_1,a_3,\cdots,a_k,a_{k+1}$ 中时，第二次得到组合 $a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1},\cdots$，最后把 a_{k+1} 添加到组合 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中时，第 $k+1$ 次得到组合 $a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}$。因此

$$C_m^{k+1}=C_m^k\frac{m-k}{k+1}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\cdots k(k+1)}.$$

定理 7（牛顿二项式定理） 对任意的 a,b 及自然数 n，有

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^sa^{n-s}b^s+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n. \quad (7)$$

证明 1° 因为 $a+b=a+b$，所以(7)式对 $n=1$ 成立。

2° 设 $(a+b)^k=a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+b^k$，则

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)^k(a+b)\\&=(a^k+C_k^1a^{k-1}b+\cdots+b^k)(a+b)\\&=a^{k+1}+(1+C_k^1)a^kb+(C_k^1+C_k^2)a^{k-1}b^2+\cdots\\&\quad+(C_k^s+C_k^{s+1})a^{k-s}b^{s+1}+\cdots+b^{k+1}.\end{aligned}$$

注意到 $C_k^s+C_k^{s+1}=C_{k+1}^{s+1}$①，得到

① 请读者补出证明。——译者注

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+C_{k+1}^{1}a^{k}b+C_{k+1}^{2}a^{k-1}b^{2}+\cdots$$
$$+C_{k+1}^{s+1}a^{k-s}b^{s+1}+\cdots+b^{k+1}.$$

后　　记

Yu. A. Gastev

归纳（拉丁文是inductio）是由特殊推到一般，演绎（拉丁文是 deductio）是由一般推得特殊。众所周知，对于经验的和实验的科学，最重要的是从一些各别的观察和实验结果概括出普遍性原理（即归纳）。长期以来，数学一直被视为具体实现纯粹演绎方法的典范，因为人们总是这样地理解（明确地或是含蓄地），所有的数学命题（除了用来作为原始的假设或公理的以外）都是被证明的，而它们的具体应用都是从适合于普遍情形的证明中导出的（即演绎）。

但是，我们在§1中读到这样的句子："在数学中，归纳被广泛使用，但用时必须有技巧"；"…为了只得到正确的结论，在数学中应该怎样使用归纳呢？"这几句话的真正含义是什么？我们是否可以理解为：在数学方法中，有一些是"可信赖的"，使用时绝对不会出错（如演绎法）；而另外有一些是"不完全可信赖的"，使用时，尤其如果是由那些缺乏技巧的人（或者，如同作者在书中指出的那样，以"一种粗率的态度"）使用，就可能会出错（如归纳法）。如果真是这样理解的话，那么，该到何处去寻找判别这种"归纳"法可靠与否的准则呢？我们又怎么能再相信数学推理所具有的不可更改的强制性①呢？或许这根本是不可能的

① 即无可置疑的正确性。——译者注

事情？数学结论是否和经验科学的实验定律一样，也具有不可靠的本性呢？是否从此必须对所有已证明过的结论再去作一番检验，就像学生在学校里经常被要求对他们所做的运算或按一般公式求得的方程的解进行“检验”？

其实，事情并非如此。无疑地，归纳（即导向一种想法，一个猜测或假设）在数学中起了十分重要的作用，但这种作用只是纯粹启发性的：人们用它去猜测什么是问题的解，解的形式大致是什么样的。但是，数学命题只能用演绎建立起来。任何一个数学结论，在没有从原始的前提推导出来以前，都不能声称自己是可靠的或正确的。

现在，让我们来看看“数学归纳法”。问题的关键在于：“数学归纳法”是一种演绎法。乍一看，这一数学推理的结构似乎是“从特殊推到一般”，但仔细检查一下就很容易发现，所谓的数学归纳其实根本不是归纳，而是一种纯粹演绎的推理方法。用这种方法作出的证明由两部分组成（用本书中的术语）：

（1）基础步——证明命题对一个（或几个）自然数（例如对 0 或 1，§1中称之为“定理 1”）成立，这一证明是演绎的！

（2）归纳步（即“定理 2”）——由对一个一般结论的证明（又一次是演绎的）构成：命题对 n 成立可推出它对 $n+1$ 也成立。

“数学归纳原理”（见§1中第 3 小节的末尾）是一个非常精确的陈述（它的直观说服力被许多数学家认为是勿容置疑的，它作为算术公理化结构中的一条公理出现），使得可以通过基础和归纳步，导出所考虑的命题对所有自然数 n 成立的一个纯粹演绎的证明。因此，不可能出现“没有顾及前提”

的情形，这前提在（通过“归纳”）去“达到”结论——定理确已对所有的自然数n给出了证明——仍是必不可少的。从被证明的基础步，例如，定理对数0成立，由归纳步我们得到定理对数1成立的证明。用同样的方法，我们依次得到定理对数2,3成立的证明，…，按这种方式，我们证明了定理的结论对所有的自然数都成立。

换句话说，人们之所以采用“数学归纳法”这一名称，只是由于这一方法立刻使我们联想到习惯的“归纳”推理（因为基础步也只是对特殊的情形作出了证明）。但是，归纳步不同于立足在经验之上的判断自然(及社会)科学中的归纳推理的似真性判别准则，它是完全不需要任何特殊前提的普遍性的结论，而且是按照演绎推理的严格规范证明的。数学“归纳”被确切地称为“完全归纳”是因为它（与通常的不能为我们提供完全的知识的“不完全”归纳相反）是演绎（百分之百可信赖）的证明方法。

因此，在数学中，归纳不能作为一种证明方法，①但同时也绝不排除在其中广泛使用“数学归纳”的演绎法。

在接受了上述有关名词的理解之后，当然，我们就可以无疑义地解释如“几何中的归纳”或“数学中的归纳”等说法。但同时必须牢记：第一种说法，严格说来，与较繁琐（但精确！）的说法“用数学归纳的演绎法证明几何中的定理”有完全不相同的含义（尽管为了叙述简便，常将两者作为同义语）；而第二种说法和“数学归纳”的意义完全不一

① 我们曾提到，在作出有可能发现新结果的猜测方面，“通常的”（即“不完全的”）归纳起着十分有效的作用。有关这方面的情况以及“通常的”归纳与数学归纳之间的联系，见G.Polya的《How to solve it》(中译本：G.波利亚，《怎样解题》，阎育苏译，科学出版社，1982年)。

样（纯语法构造也正相反——这是指英文，前者是“induction in mathematics”，而后者是“mathematical induction”，译者注），后者应作为一个整体来理解，丝毫没有“数学中的归纳”的意思。

数学归纳法（按本小册子中的形式）是用以证明算术定理的一种方法，所谓算术定理，确切地说，是表述自然数（0,1,2,…，有时，正如书中说的那样，可以认为自然数序列是以1起始的，这显然无关紧要①）的一般性质的定理。对于自然数的算术，在确切定义（充分合理且是极有效的）的意义上，这一方法是用以证明定理的一个普遍的（经常是唯一的）工具。

也许上面的一段话会使读者感到似乎有些难懂，因此有必要说几句关于算术的公理化（演绎）结构，这整个结构是建立在用数学归纳法定义的运算的基础上的。例如，在定义加法时，首先定义一个数加上1或0得什么（作为归纳的基础步），然后将加上任何一个数的定义归结为加上比它小的前一个数的定义（即归纳步）。完全清楚的是，为了“到达”自然数的某些一般的性质（例如关于加法的性质和乘法的性质），如果确实想要公理化地证实它们，则我们必须用同一个“梯子”（它的最低“一格”上是最小的自然数所具有的某些合适的性质），一格一格地“攀登”到我们想要的一般概念；粗略地说，否则我们简直看不到如何“抓住”所需的证明。任何一般的算术命题的证明都是这样完成的！如果这一点在学校里学习的算术和代数中看得并不是很明显，那只是因为它们（非常明显地）更多地依靠经验和直观，而不是

① 按通常的定义，自然数序列是{1,2,…}，而{0,1,…}是非负整数序列。——译者注

建立在公理化的基础上①②．归根到底，即使最爱挑剔和最富批评精神的读者也常常只满足于知道和理解，例如，乘法关于加法的分配律是能证明的，但他们并不想要一个真实的证明．（但是，这种相信，即使完全被证实，也和可靠的证明是不一样的，打个比方，就好比一个是报纸上的消息，而另一个是目击者的亲眼所见，前者来源于后者，而且，这样的类比还可以更深入．）这就是为什么在学校里，数学归纳法远比那些直观上比较明显又容易掌握的算术性质出现得晚的原因．例如，它是在讲Newton二项式定理时出现的，而后者的正确性并不是能“一目了然”的．

数学的其他一些分支根据它们建立在算术基础上的程度需要数学归纳法．这种需要有二重性．首先，许多数学分支直接建立在自然数算术的基础上（例如，有理数理论，它又导致实数理论）；其次，有一些数学分支可以用算术来解释，例如Euclid 几何中的一切均可表成实数的“坐标语言”．在这种情形，我们可以这样说，本质上是几何内涵的结论可以用数学归纳法对它们的算术解释作出精确的证明．可以认为，这些命题的几何（或其他某些）“特色”对证明本身已不再具有什么更多的意义，就好比是，在3根黄瓜加5根黄瓜或3条船加5条船的问题中黄瓜和船的本质一样（读者在书中也可以找到这种类型的例子）．

但也许可能发生这样的情况，归纳的基础是用本质上非

---

① 有这样的情况，自然数的某些性质在学校里证明了，而且证明并不用数学归纳法，这仅仅是因为，那些需要用归纳法证明的命题被（经常是不明显地）用作了前提（这种情况的一个例子是，在Euclid几何中，“平行公设”的使用可以被“掩盖”，而代之以用它的某一个推论）．

② 利用最小自然数原理（这更能为大家接受），更是掩盖实质上需要数学归纳法的常用手段．——校者注

算术的方法证明的。然而，即使在这种情况，归纳步（即使也建立在几何的或其他另外一些的公理的基础上）仍是关于自然数的一般结论，因为问题是：某种性质是否对任意自然数 n 成立[①]？

因此，关于自然数的数学归纳法作为一种方法，可用于证明“形式上”是算术的，但内涵可能是几何的或其他的（也许是力学的）定理。

我们还注意到，这一方法（它已被表明在实现那些仿效构造自然数($0,1,2,\cdots$)的过程的证明中是极富有成果的）还能推广到其它完全不同类型的过程，例如在数理逻辑中。数理逻辑是研究由形式为 A、B、C、…的“初等公式”（“初等语句”）利用符号，例如，&(与)，$\vee$(或)，$\supset$(隐含)，$\neg$(非)等建立的“公式”（“语句”）的，其中公式的一般性质是用所谓的公式构造的归纳法证明的：它证明

（1）每一个初等公式具有所需的性质（基础步）；

（2）这些性质对公式($X \& Y$)，($X \vee Y$)，($X \supset Y$)及 $\neg X$ 也都成立(归纳步)，

并由此得出结论：命题对前述的所有公式证明是成立的。这种做法和本书中讨论的数学归纳法是如此相似，即使不具备数学背景的读者也能看出来。

一般说来，任何一个数学(或逻辑)的结构，如果它是由一个或几个初始研究对象借助于一个或几个转移运算得到新的研究对象的，都可以用作为给出定义和给出证明的相应的“归纳”方法（而且，正如我们已经看到的那样，是纯粹演绎的）的基础。（有时候，例如在数学分析中，数学归纳法

① 即，“从 n 到 $n+1$”的推导本身是对任意 n 证明的。

的作用相对次要一些，这可以确切地解释如下：实数并不像自然数那样，它并不是一个简单明了、轮廓清晰的结构，因此，各种类型的"关于实数的归纳法"远不具有在算术中的数学归纳法以及它在数理逻辑中的变形所具有的普遍性。）

对于读者可能会产生的有关一般逻辑的或一般数学的本质的问题，我们建议他去阅读有关专著①。本文成功地提供给了读者关于数学归纳法在初等数学中的具体应用的一个初步了解。

习题的提示与解答

1．猜想：$u_n=3n-2$．1° 猜想对 $n=1$ 正确．2° 设 $u_k=3k-2$，则 $u_{k+1}=u_k+3=3k-2+3=3(k+1)-2$．

2．猜想：$S_n=2^n-1$．1° 猜想对 $n=1$ 正确．2° 设 $S_k=2^k-1$，则 $S_{k+1}=S_k+2^k=2^{k+1}-1$．（也可构造差 $2S_n-S_n$，并证明 $2S_n-S_n=2^n-1$．）

3．1° 等式对 $n=1$ 成立．2° 设

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3},$$

则

$$\begin{aligned}&1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2\\&=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2\end{aligned}$$

---

① 例如，见L. Henkin, On Mathematical Induction, *Amer. Math. Mon.*, 67 (1960), 4; I.V. Arnol'd, Theoretical Arithmetic, Moscow, Uchpedgiz, 1939, Secs. 13,14,17,19; S.C. Kleene, Introduction to Metamathematics, New York, Toronto, van Nostrand, 1952, Secs. 7,13,21,38, etc., Mathematical Induction, "Philosophical Encyclopedia", Moscow, 1964 (Vol.3).

$$=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}.$$

4. 1° 等式对 $n=1$ 成立。2° 设 $1^3+2^3+\cdots+k^3=[k(k+1)/2]^2$，则

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=k^2(k+1)^2/4+(k+1)^3$$
$$=[(k+1)(k+2)/2]^2.$$

5. 1° 等式对 $n=1$ 成立。2° 设

$$1+x+x^2+\cdots+x^k=\frac{x^{k+1}-1}{x-1},$$

则

$$1+x+x^2+\cdots+x^k+x^{k+1}=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}+x^{k+1}=\frac{x^{k+2}-1}{x-1}.$$

6. 1° 等式对 $n=1$ 成立。2° 设

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+k(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4},$$

则

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+k(k+1)(k+2)$$
$$+(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

7. 1° 结论对 $n=1$ 成立。2° 设

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1},$$

则

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}.$$

8．1° 等式对 $n=1$ 正确。2° 设

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)},$$

则

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

9．1° 等式对 $n=1$ 成立。2° 设

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1},$$

则

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

10．1° 等式对 $n=1$ 成立。2° 设

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1},$$

则

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}.$$

11．1° 等式对 $n=1$ 成立。2° 设

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}$$

$$=\frac{k}{a(a+k)},$$

则

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}$$

$$+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}$$

$$=\frac{k+1}{a(a+k+1)}.$$

12. 1° 等式对$n=1$和$n=2$成立。2° 设

$$u_{k-2}=\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta},\qquad u_{k-1}=\frac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\alpha-\beta},$$

则

$$u_k=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}.$$

13. 1° 当$n=0$时有

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2},$$

因此，等式成立。

2° 设

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\cdots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}},$$

则

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\cdots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

14．当$n=1$时，有$1-\frac{x}{1!}=-\frac{x-1}{1}$；当$n=2$时，有

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=\frac{(x-1)(x-2)}{2!};$$

当$n=3$时，有

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

$$=-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}.$$

由此猜想：

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}.$$

下面证实这个猜想。

1° 猜想对$n=1$成立。

2° 设

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

$$=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)}{k!},$$

则

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots+(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-k)}{(k+1)!}$$

$$=(-1)^{k}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)}{k!}$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-k)}{(k+1)!}$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)}{k!}\left[\frac{x}{k+1}-1\right]$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)(x-k-1)}{(k+1)!}.$$

15．1° 命题对$n=0$成立。

2° 假设命题对$n=k$成立，即

$$A_k=11^{k+2}+12^{2k+1}$$

能被133整除，则

$$\begin{aligned}A_{k+1}&=11^{k+3}+12^{2(k+1)+1}=11\cdot 11^{k+2}+144\cdot 12^{2k+1}\\&=11\cdot 11^{k+2}+133\cdot 12^{2k+1}+11\cdot 12^{2k+1}\\&=11\cdot(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}\\&=11\cdot A_k+133\cdot 12^{2k+1}.\end{aligned}$$

我们把 A_{k+1} 用和的形式表出，其中的每一个加数能被133整除。因此，A_{k+1} 能被 133 整除。

16．1° 命题对 $n=1$ 显然成立。

2° 假设命题对 $n=k$ 成立，即 k 条直线把平面分成$2k$个角，可以看到：第 $k+1$ 条直线就将其中的两个对顶角同时各分为两部分.因此，$k+1$ 条直线把平面分成 $2k+2=2(k+1)$部分。

17．1° 等式对 $n=1$ 成立，因为

$$\frac{\sin\frac{3x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+\cos x.$$

2° 设

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos kx=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

则

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos kx+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}x+2\sin\frac{x}{2}\cos(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2k+3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

18. 1° 等式对 $n=1$ 成立，因为

$$\frac{2\sin x-\sin 2x}{4\sin^2(x/2)}=\frac{2\sin x(1-\cos x)}{4\sin^2(x/2)}=\sin x.$$

2° 设

$$\sin x+2\sin 2x+\cdots+k\sin kx=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)},$$

则有

$$\sin x+2\sin 2x+\cdots+k\sin kx+(k+1)\sin(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)}+(k+1)\sin(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\sin kx-k\sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)}$$

$$+\frac{2(k+1)\sin(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2(x/2)}$$

$$=\frac{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)\sin kx}{4\sin^2(x/2)}$$

$$-\frac{2(k+1)\cos x\sin(k+1)x}{4\sin^2(x/2)}$$

$$=\frac{(k+2)\sin(k+1)x+(k+1)\sin kx}{4\sin^2(x/2)}$$

$$-\frac{(k+1)[\sin(k+2)x+\sin kx]}{4\sin^2(x/2)}$$

$$=\frac{(k+2)\sin(k+1)x-(k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2(x/2)}.$$

19. 1° 等式对$n=1$成立，因为

$$\frac{2\cos x-\cos 2x-1}{4\sin^2(x/2)}=\frac{2\cos x-2\cos^2 x}{4\sin^2(x/2)}=\cos x.$$

2° 设

$$\cos x+2\cos 2x+\cdots+k\cos kx$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2(x/2)},$$

则

$$\cos x+2\cos 2x+\cdots+k\cos kx+(k+1)\cos(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2(x/2)}+(k+1)\cos(k+1)x$$

$$=\frac{(k+1)\cos kx-k\cos(k+1)x-1}{4\sin^2(x/2)}$$

$$+\frac{2(k+1)\cos(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2(x/2)}$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\sin^2(x/2)}$$

$$-\frac{2(k+1)\cos x\cos(k+1)x+1}{4\sin^2(x/2)}$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x+(k+1)\cos kx}{4\sin^2(x/2)}$$

$$-\frac{(k+1)[\cos(k+2)x+\cos kx]+1}{4\sin^2(x/2)}$$

$$=\frac{(k+2)\cos(k+1)x-(k+1)\cos(k+2)x-1}{4\sin^2(x/2)}.$$

20．1° 等式对$n=1$成立，因为

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\cot x=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}=\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}.$$

2° 设

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$$

$$=\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}-\cot x,$$

则有

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k-1}}$$

$$=\frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k}-\cot x+\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\frac{\cot^2\frac{x}{2^{k+1}}-1}{\cot\frac{x}{2^{k+1}}}+\frac{1}{2^{k+1}\cot\frac{x}{2^{k+1}}}-\cot x$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{x}{2^{k+1}}-\cot x.$$

21. 1° 我们有

$$\tan(\operatorname{arc}\tan 2-\operatorname{arc}\tan 1)=\frac{2-1}{1+2\cdot 1}=\frac{1}{3}.$$

因此

$$\operatorname{arc}\tan 2-\operatorname{arc}\tan 1=\operatorname{arc}\tan\frac{1}{3}=\operatorname{arc}\cot 3.$$

于是，等式对$n=1$成立。

2° 首先证明

$$\operatorname{arc}\cot(2k+3)=\operatorname{arc}\tan\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arc}\tan 1. \tag{1}$$

事实上，

$$\tan\left(\operatorname{arc}\tan\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arc}\tan 1\right)=\frac{\frac{k+2}{k+1}-1}{1+\frac{k+2}{k+1}\cdot 1}=\frac{1}{2k+3}.$$

于是

$$\operatorname{arc}\tan\frac{1}{2k+3}=\operatorname{arc}\cot(2k+3)=\operatorname{arc}\tan\frac{k+2}{k+1}-\operatorname{arc}\tan 1.$$

假定等式对$n=k$成立，即

$$\operatorname{arc}\cot 3+\operatorname{arc}\cot 5+\cdots+\operatorname{arc}\cot(2k+1)$$
$$=\operatorname{arc}\tan 2+\operatorname{arc}\tan\frac{3}{2}+\cdots+\operatorname{arc}\tan\frac{k+1}{k}-k\operatorname{arc}\tan 1. \tag{2}$$

现证明它对 $n=k+1$ 也成立，即

$$\operatorname{arc}\cot 3+\operatorname{arc}\cot 5+\cdots+\operatorname{arc}\cot(2k+3)$$
$$=\operatorname{arc}\tan 2+\cdots+\operatorname{arc}\tan\frac{k+2}{k+1}-(k+1)\operatorname{arc}\tan 1. \tag{3}$$

将等式(1)和(2)相加得等式(3)。

22. 1° 等式对 $n=1$ 成立，因为

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

2° 设

$$(\sqrt{3}-i)^k=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right),$$

则

$$(\sqrt{3}-i)^{k+1}=2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6}-i\sin\frac{k\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{6}-i\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\right].$$

23. 1° 等式对 $n=1$ 成立。

2° 设

$$(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx,$$

则有

$$(\cos x+i\sin x)^{k+1}=(\cos kx+i\sin kx)(\cos x+i\sin x)$$

$$=(\cos kx\cos x-\sin kx\sin x)$$

$$+i(\cos kx\sin x+\sin kx\cos x)$$

$$=\cos(k+1)x+i\sin(k+1)x.$$

24. 错误在于最后的一句话："命题得证"。实际上，书中已证明：不等式$2^n>2^{n+1}$只要对$n=k$成立，必可推出它对$n=k+1$也成立，其中k是任意自然数。

这里仍然推不出所要证的不等式对至少一个 n 的值成立，更谈不上对任意的自然数 n 成立了。

简单地说，错误出在只证明了定理 2 ，而没有证明定理 1 ，因而缺乏归纳的基础。

25. 容易看出，3 是使不等式 $2^n>2n+1$ 成立的最小自

然数.

考虑到证过的事实(见习题24):不等式$2^n>2n+1$对$n=k$成立蕴涵着它对$n=k+1$也成立. 由此断言不等式对任意大于等于3的自然数n成立.

26. 1° 不等式对$n=2$成立，因为

$$1+1/\sqrt{2}>\sqrt{2}.$$

2° 设

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}. \qquad (4)$$

我们要证明

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}. \qquad (5)$$

不等式

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}-\sqrt{k} \qquad (6)$$

对任意$k\geqslant 0$成立. 实际上，不等式(6)等价于

$$1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}>1,$$

它由不等式(6)两边同乘$\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$得到. 把不等式(4)和(6)两边分别相加，就得不等式(5).

27. 1° 当$n=2$时，不等式为$\frac{16}{3}<6$,故它对$n=2$成立.

2° 设

$$\frac{4^k}{k+1}<\frac{(2k)!}{(k!)^2},$$

其中$k\geqslant 2$. 容易验证，对$k>0$,

$$\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}.$$

因此

$$\frac{4^k}{k+1}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2},$$

即

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}.$$

（刘　勇译，朱学贤审校）

关于数学归纳原理的一点注记

潘承彪

在数学证明中，数学归纳原理与最小自然数原理是最经常被用到的。那么这两个熟知的原理之间有怎样的关系呢？在国内外出版的许多书中，特别是中学生数学读物中，说这两者是等价的，并给出了“证明”。本书的《数学归纳法》一文中就给出了这样的“证明”（见第37页）。但事实上这两个原理是不等价的，给出的所有这类“证明”都是错误的。弄清这一问题的关键是：什么是自然数？即自然数是怎样定义的？也就是自然数的公理化问题。在这里不打算也不可能深入讨论这一问题，而只是简单地指出导致这一错误的原因。

自然数1，2，3，…的形成及我们对其性质与运算的认识都源于经验。在探讨由经验得来的结论之间的关系时，一不小心往往在理论上会出现模糊、不严格、甚至错误。这就导致数学中重要的方法——公理化。通常，自然数集合严格的抽象定义是由Peano公理（见[1]的附录一）给出的。这一公理系统中最重要的一条就是归纳公理，即数学归纳原理。自然数的加法、乘法以及大小关系都是在Peano公理的基础上给以严格定义的，并进而对我们所熟知的源于经验的加法、乘法运算，以及大小关系之间的性质（包括最小自然数原理）给出了严格证明（见[1]的附录一）。因此，不仅是这些性质，而且这些运算与关系都是建立在数学归纳原理之上的。当然，大小关系及其性质也是这样。

在我们断言：“由最小自然数原理可推出数学归纳原理”

时，一个逻辑上的问题就出现了：最小自然数原理中的"大小"关系是怎样定义的？如果像《数学归纳法》一文中那样给出"证明"，那么这种论证就有在前提中已包含了结论的毛病，因而是不正确的；如果给出与数学归纳原理无关的"大小"关系的定义及其性质的证明，那么，就立即会出现"自然数"究竟是以怎样的公理体系来定义的问题。这就是导致所有这类"证明"不正确的关键所在。要彻底弄清这一点并不容易，这里不作进一步讨论了。有兴趣的读者可看[1]的附录一，特别是通过做该附录的习题，会对这一问题有一个初步的、具体的了解。这对提高我们的数学素养是大有帮助的。

最后，要指出的是：即使我们错误地认为数学归纳原理与最小自然数原理等价，并相信了错误的证明，也不会影响我们正确熟练地运用这两个原理。因为，这是一个深层次的数学基础问题。也许这正是这一错误论断与证明长期在国内外广泛流传，和被数学工作者忽略的原因吧。

参考文献

[1] 潘承洞、潘承彪，初等数论，北京大学出版社，1992。

递 归 序 列[①]

A.I.Markushevich

前　言

递归序列是中学数学课程中的一个课题(如等差数列、等比数列、自然数平方序列、两个多项式的商式的系数序列等等)。虽然这只是一个很小的专题[②]，但却有许多著名的分析学专家对此作了全面、准确的论述。

递归序列理论的奠基人是18世纪法国数学家棣美弗(Abraham De Moivre)(著名的公式

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

就是以他的名字命名的)和彼得堡科学院的创始人之一——瑞士数学家伯努利(Daniel Bernulli)。形成系统的理论则归功于18世纪伟大的数学家、彼得堡科学院院士欧拉(Leonard Euler)，他在其《无穷小分析引论》第13章中专门介绍了递归序列的理论。在最近的著作中，值得注意的是俄罗斯数学家切比雪夫(P.L.Chebyshev)和马尔可夫(A.A.Markov)，他们在《差分算法》中阐述了递归序列理论。

---

① 本文根据Mir Publishers·Moscow出版的《Little Mathematics Library》中的小册子《Recursion Sequences》(Translated from the Russian by V. Zhitomirsky，1975)英文版译出。

② 对于精通分析学的读者来说，递归序列理论可以看成是对常系数线性微分方程的类推。

§1 什么是递归序列

递归序列的概念是等差数列和等比数列① 的自然推广. 自然数的平方或立方序列、由循环小数的数字组成的序列、由两个按 x 的升幂排列的多项式的商的系数组成的序列等都是它的特殊情形. 在中学数学课程中，递归序列应用十分广泛. 递归序列理论是所谓有限差分法的一部分，本书就是讲述这一理论. 为了使初学者易于阅读和理解，我们并不要求读者具有这方面的预备知识，所讲述的结论都给出证明，仅有一个结论，将根据线性代数的结论直接给出而不予证明.

我们先介绍一些基本概念. 序列一般表示为

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots \tag{1}$$

或简单地记为$\{u_n\}$. 对于序列(1)，如果存在自然数 k 及a_1, $a_2, a_3, \cdots, a_k$(a_i 为实数或虚数，$1 \leqslant i \leqslant k$)，使得从某一个数 n 开始，

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n \quad (n \geqslant m \geqslant 1) \tag{2}$$

成立，则序列(1)称为k阶递归序列，式(2)称为k阶递归关系式.

由式(2)可以看出，递归序列的特点是：从某一项开始，序列中的每一项都可以用紧接在它前面的k(k是相同的)项由式(2)表示出来. 正是由于必须回到前面的项才能得到序列的下一项，所以它被称为“递归序列”. 下面看几个递归序列的例子.

例 1 等比数列. 对于等比数列

---

① 等差数列、等比数列有时也分别称为算术级数、几何级数. ——译者注

$$u_1 = a, u_2 = aq, u_3 = aq^2, \cdots, u_n = aq^{n-1}, \cdots, \tag{3}$$

式(2)可以表示为

$$u_{n+1} = qu_n, \tag{4}$$

这里 $k=1$, $a_1 = q$. 可见，等比数列是 1 阶递归序列.

例 2 等差数列. 对于等差数列

$$u_1 = a, u_2 = a+d, u_3 = a+2d, \cdots, u_n = a+(n-1)d, \cdots,$$

我们有

$$u_{n+1} = u_n + d.$$

这还不是式(2)的形式，因为上式右端含有常数项 d. 不过，我们可观察下面的两个式子

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d,\ \ u_{n+1} = u_n + d.$$

两式相减得 $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$, 即

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n. \tag{5}$$

式(5)就是式(2)的形式，这说明，等差数列是一个 2 阶递归序列.

例 3 古老的有关兔子数目的斐波那契(Fibonacci)① 问题. 假设每对成年兔子每月生一对小兔子，每对新出生的小兔子一个月后长大，问：一年内一对兔子可以繁殖成多少对成年兔子？

这个问题的解答是很容易的，而且，对问题的答案本身我们也并不感兴趣. 设最初的成年兔子对数为 u_1, 一个月后成年兔子对数为 u_2, 两个月后成年兔子对数为 $u_3, \cdots, n$ 个月后成年兔子对数为 u_{n+1}, 我们感兴趣的是这些成年兔子对数组成的序列 $u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}, \cdots$. 显而易见，$u_1 = 1$. 由于新出生的兔子一个月后才长成成年兔子，所以一个月后成年兔

---

① 斐波那契，中世纪意大利数学家，著有《算盘书》，在广泛吸收中亚和拜占庭地区算术和几何知识的基础上，自己作了创造性的整理和深入发展. ——译者注

子对数仍为 1，即$u_2=1$。两个月后，第一对小兔子已成年，而后面出生的兔子还未成年，因此，此时成年兔子对数为2，即$u_3=2$。如果我们已经求出 $n-1$个月后成年兔子的对数 u_n 和几个月后的成年兔子的对数u_{n+1}，那么，u_n对成年兔子在第$n-1$个月生下的u_n对小兔子在$n+1$个月后已成年，而其后出生的小兔子尚未成年，所以，$n+1$个月后成年兔子的对数为

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n. \tag{6}$$

由式(6)可知

$$u_4=u_3+u_2=3, \qquad u_5=u_4+u_3=5,$$

$$u_6=u_5+u_4=8, \qquad u_7=u_6+u_5=13, \cdots.$$

这样，我们得到下面的序列：

$$\left.\begin{matrix} u_1=1, & u_2=1, & u_3=2, & u_4=3, \\ u_5=5, & u_6=8, & u_7=13, \cdots, & \end{matrix}\right\} \tag{7}$$

也就是从第三项起，每一项都是它前面两项之和。这个序列就是著名的*斐波那契序列*，序列中的项称为斐波那契数。式(6)表明，斐波那契序列是一个 2 阶递归序列。

例 4 自然数的平方序列。设序列

$$u_1=1^2, u_2=2^2, u_3=3^2, \cdots, u_n=n^2, \cdots. \tag{8}$$

因为 $u_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$，所以

$$u_{n+1}=u_n+2n+1. \tag{9}$$

令 n 增加 1，我们得到

$$u_{n+2}=u_{n+1}+2n+3. \tag{10}$$

(10) - (9)① 得

$$u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_2+2,$$

即

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u\ \ +2. \tag{11}$$

在(11)式中令 n 增加 1，得

---

① 这表示式(10)减去式(9)，下同。——译者注

$$u_{n+3}=2u_{n+2}-u_{n+1}+2. \tag{12}$$

(12) - (11)得

$$u_{n+3}-u_{n+2}=2u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n,$$

即

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n. \tag{13}$$

这个递归关系是3阶的，因此，序列(8)是一个3阶递归序列。同理可以证明，自然数的立方组成的序列

$$1^3, 2^3, 3^3, \cdots, n^3, \cdots \tag{14}$$

是一个4阶递归序列，它的各项满足

$$u_{n+4}=4u_{n+3}-6u_{n+2}+4u_{n+1}-u_n, \tag{15}$$

请读者自己证明。

例5 所有循环序列都是递归序列。我们以有理分数得到的循环小数的数字序列

$$\frac{761}{1332}=0.57132132132\cdots$$

为例来说明这一点。在这个序列中，

$$\left.\begin{array}{l} u_1=5, \ u_2=7, \ u_3=1, \ u_4=3, \\ u_5=2, \ u_6=1, \ u_7=3, \ \cdots. \end{array}\right\} \tag{16}$$

显然，有

$$u_{n+3}=u_n(n\geqslant 3). \tag{17}$$

式(17)可以表示成式(2)的形式：

$$u_{n+3}=0\cdot u_{n+2}+0\cdot u_{n+1}+1\cdot u_n,$$

因此，式(17)是一个3阶递归关系式，其中，$k=3$，$a_1=0$，$a_2=0$，$a_3=1$。从而，序列(16)是一个3阶递归序列。

例6 现在，考察两个x的升幂多项式相除所得商式的系数所成的序列。给定

$$P(x)=A_0+A_1x+\cdots+A_lx^l,$$

$$Q(x)=B_0+B_1x+\cdots+B_kx^k(B_0\neq 0).$$

我们用 $Q(x)$去除 $P(x)$。如果有余式，则除法运算可以无限制地继续下去。商式各项按如下顺序排列：

$$D_0+D_1x+D_2x^2+D_3x^3+\cdots+D_nx^n+\cdots.$$

考虑序列

$$u_1=D_0,\ u_2=D_1,\ \cdots,\ u_n=D_{n-1},\ \cdots. \tag{18}$$

我们来证明这是一个 k 阶递归序列（k 为除式的次数）。对任意自然数 $n\geqslant l-k+1$，除法运算以商式得到 x^{n+k} 项为止。余式 $R(x)$是一个多项式，它只含有高于 x 的 $n+k$ 次幂的项。写出被除式、除式、商式及余式间的关系，我们得到恒等式

$$A_0+\cdots+A_lx^l$$
$$\equiv(B_0+\cdots+B_kx^k)(D_0+\cdots+D_{n+k}x^{n+k})+R(x).$$

分别计算恒等式两边 x^{n+k} 的系数，二者是相等的。当 $n+k\geqslant l+1$ 时，恒等式左边 x^{n+k} 的系数为 0，因此，恒等式右边 x^{n+k} 的系数也应是 0。但是，x^{n+k} 只在

$$(B_0+\cdots+B_kx^k)(D_0+\cdots+D_{n+k}x^{n+k})$$

中出现（正如上面所说，余式 $R(x)$中只含 x 的高于 $n+k$ 次的幂），所以，右边 x^{n+k} 的系数为

$$D_{n+k}B_0+D_{n+k-1}B_1+\cdots+D_nB_k. \tag{19}$$

根据前面的讨论，

$$D_{n+k}B_0+D_{n+k-1}B_1+\cdots+D_nB_k=0,$$

因此，当 $B_0\neq 0$ 时，

$$D_{n+k}=-\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1}-\cdots-\frac{B_k}{B_0}D_n(n\geqslant l-k+1). \tag{20}$$

这是一个 k 阶递归关系式，它表明序列(18)是一个 k 阶递归序列。

§2 递归序列与多项式的商式

在上面所列举的例子中，例 6 是最典型的。现在，我们要指出，任意一个 k 阶递归序列

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots, \tag{21}$$

如果它满足关系式

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+\cdots+a_ku_n\ (n\geqslant m\geqslant 1), \tag{22}$$

那么，序列(21)就与由某个多项式 $P(x)$除以多项式

$$Q(x)=1-a_1x-\cdots-a_kx^k \tag{23}$$

的商式的系数组成的序列相同。

设自然数 n 满足 $n>k+m-2$。用 $u_1+u_2x+u_3x^2+\cdots+u_{n+1}x^n$ 乘多项式 $Q(x)$，得

$$\begin{aligned}(1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k)(u_1+u_2x+\cdots\\+u_{k+m-1}x^{k+m-2}+\cdots+u_{n+1}x^n)\\=[u_1+(u_2-a_1u_1)x+\cdots\\+(u_{k+m-1}-a_1u_{k+m-2}-\cdots-a_ku_{m-1})x^{k+m-2}]\\+[(u_{k+m}-a_1u_{k+m-1}-\cdots-a_ku_m)x^{k+m-1}+\cdots\\+(u_{n+1}-a_1u_n-\cdots-a_ku_{n-k+1})x^n]\\-[(a_1u_{n+1}+\cdots+a_ku_{n-k+2})x^{n+1}+\cdots\\+a_ku_{n+1}x^{n+k}].\end{aligned} \tag{24}$$

第一个方括号中的多项式不高于 $l=k+m-2$ 次，其系数与 n 的取值无关，我们记之为 $P(x)$①，

$$\begin{aligned}P(x)=u_1+(u_2-a_1u_1)x+\cdots\\+(u_{k+m-1}-a_1u_{k+m-2}-\cdots-a_ku_{m-1})x^{k+m-2}.\end{aligned} \tag{25}$$

---

① 这就是要求的多项式。——译者注

由式(22)知，式(24)的第二个方括号中多项式的系数均为零；第三个方括号是一个系数依赖于n，各项均高于$n+1$次的多项式。我们用$R_n(x)$表示这个多项式。这样，(24)式可以写为

$$P(x)=(1-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_kx^k)\times(u_1+u_2x+u_3x^2+\cdots+u_{n+1}x^n)+R_n(x). \tag{26}$$

因此，$u_1+u_2x+\cdots+u_{n+1}x^n$ 是商式（到 x^n 为止），$R_n(x)$ 是余式。这个除法运算可以继续下去，因而，

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ u_{n+1},\ \cdots$$

确实是多项式(25)除以多项式(23)所得商式的系数构成的序列。

考虑斐波那契序列

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=3,\ u_5=5,\ \cdots.$$

因为它的各项满足关系式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\ (n\geqslant 1),$$

所以，$m=1$，$k=2$，$a_1=1$，$a_2=1$，$Q(x)=1-x-x^2$。

$P(x)$的最高次幂必不超过$k+m-2=1$。由式(25)得

$$P(x)=1+(1-1\times 1)x=1.$$

可见，斐波那契序列与1除以$1-x-x^2$的商式的系数组成的序列完全相同。

§3 递归序列的和序列

中学生在学习算术数列、几何数列及自然数的平方序列时，会遇到计算这些序列的前n项和的问题。

设

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots \tag{27}$$

是一个k阶递归序列，其各项满足

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots+a_ku_n\ (n\geq m). \tag{28}$$

考虑序列(27)的和数序列S_n:

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ \cdots,\ S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\ \cdots. \tag{29}$$

我们证明这个序列是$k+1$阶递归序列，其通项公式为

$$S_{n+k+1}=(1+a_1)S_{n+k}+(a_2-a_1)S_{n+k-1}+\cdots+(a_k-a_{k-1})S_{n+1}-a_kS_n. \tag{30}$$

注意到:

$$\left.\begin{aligned}&u_1=S_1,\ u_2=S_2-u_1=S_2-S_1,\ \cdots,\\&u_n=S_n-(u_1+\cdots+u_{n-1})=S_n-S_{n-1},\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

设$S_0=0$，则$u_1=S_1-S_0$。在式(28)中用$S_0,S_1,\cdots,S_n$去表示$u_1,u_2,\cdots,u_n$，得

$$S_{n+k}-S_{n+k-1}=a_1(S_{n+k-1}-S_{n+k-2})+a_2(S_{n+k-2}-S_{n+k-3})+\cdots+a_k(S_n-S_{n-1}).$$

化简，得

$$S_{n+k}=(1+a_1)S_{n+k-1}+(a_2-a_1)S_{n+k-2}+\cdots+(a_k-a_{k-1})S_n-a_kS_{n-1}(n\geq m).$$

用$n+1$代替n，得

$$S_{n+k+1}=(1+a_1)S_{n+k}+(a_2-a_1)S_{n+k-1}+\cdots+(a_k-a_{k-1})S_{n+1}-a_kS_n\ (n\geq m-1).$$

这就证明了所要的结论。下面给出几个具体例子。

(a) 等比数列。在等比数列中，$u_n=aq^{n-1}$及

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}.$$

$\{u_n\}$满足$u_{n+1}=qu_n$ $(n\geq 1)$，因此$\{S_n\}$必然满足

$$S_{n+2}=(1+q)S_{n+1}-qS_n\text{①},\ n\geq 0. \tag{32}$$

---

① 注意，我们约定$S_0=0$。——译者注

（b）自然数平方序列．在自然数的平方序列中，$u_n=n^2$，$S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$．因为$\{u_n\}$的各项满足（见(13)式）

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n,\qquad n\geqslant 1,$$

所以

$$S_{n+4}=4S_{n+3}-6S_{n+2}+4S_{n+1}-S_n,\qquad n\geqslant 0.$$

（c）斐波那契序列．因为斐波那契序列满足 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$（$n\geqslant 1$），所以，其和序列$\{S_n\}$必然满足

$$S_{n+3}=2S_{n+2}-S_n,\qquad n\geqslant 0.$$

§4　递归序列的基

在一些最简单的递归序列（如等差数列、等比数列、自然数的平方序列和立方序列、循环序列等）中，我们不需要计算序列前面的项，就可以直接得到序列中的任意一项的值．但在斐波那契序列和两个多项式商的系数序列中，粗略一看，这似乎并不可能．比如，要计算斐波那契序列的第13项，我们必须利用 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$，先求出第13项以前的各项值：

$u_1=1$，$u_2=1$，$u_3=2$，$u_4=3$，$u_5=5$，$u_6=8$，

$u_7=13$，$u_8=21$，$u_9=34$，$u_{10}=55$，$u_{11}=89$，$u_{12}=144$，

然后才能得到 $u_{13}=233$．

现在，我们认真分析一下递归序列的结构，以便找到直接计算任一项的公式（不需计算前面的项），这些公式可视为等差数列或等比数列通项公式的推广．

考虑下面的 k 阶递归关系式：

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots+a_ku_n.\qquad (33)$$

如果对 $n=1,2,3,\cdots$，(33)式成立，那么，取 $n=1$，得

$$u_{k+1}=a_1u_k+a_2u_{k-1}+\cdots+a_ku_1.$$

因此，知道了 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 的值，我们可以求出 u_{k+1}。在(33)式中，取 $n=2$，有

$$u_{k+2}=a_1u_{k+1}+a_2u_k+\cdots+a_ku_2.$$

这样，我们也就求出了 u_{k+2}。一般地，若 m 是一个自然数，且已求出 $u_1,u_2,\cdots,u_k,u_{k+1},\cdots,u_{m+k-1}$，则在式(33)中，令 $n=m$，即可求出此递归序列的下一项 u_{m+k}。

可见，如果已知序列的前 k 项 $u_1,u_2,\cdots,u_k$，那么，满足(33)的 k 阶递归序列的各项就由这个递归关系式唯一地确定出来。用不同的方法来选取序列（没有任何限制条件），我们就可以得到满足关系式(33)的无限多个不同的序列。它们之间的区别将由本身的前 k 项（至少其中的一项）的不同显示出来，以及也将在后面各项的不同中看出来。

例如，任何公比为 q 的等比数列，都满足一阶递归关系式

$$u_{n+1}=qu_n,$$

而它们的首项 u_1 可取各不相同的值。任何等差数列，不论其首项 $u_1=a$ 不同，还是公差 d 不同，甚至 u_1 与 d 都不相同，但它们却都满足 2 阶递归关系式

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$$

或

$$u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n.$$

另外一个 2 阶递归关系式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

除适合斐波那契序列 1,1,2,3,5,8,13,21,34,…外（这里 $u_1=u_2=1$），随机选取 u_1 和 u_2 的值，可以得到许多适合上述 2 阶递归关系式的其他序列。例如，我们取 $u_1=-3,u_2=1$，得到下面的序列：

$$-3,1,-2,-1,-3,-4,-7,-11,-18,-29,\cdots.$$

设有一组序列

$$\left.\begin{array}{l}x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, \\ y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots,\end{array}\right\} \qquad (34)$$

它们都满足递归关系式(33)，即

$$\left.\begin{array}{l}x_{n+k}=a_1x_{n+k-1}+a_2x_{n+k-2}+\cdots+a_kx_n, \\ y_{n+k}=a_1y_{n+k-1}+a_2y_{n+k-2}+\cdots+a_ky_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n+k}=a_1z_{n+k-1}+a_2z_{n+k-2}+\cdots+a_kz_n.\end{array}\right\} \qquad (35)$$

任取与(34)中序列个数相同的一组数 $A, B, \cdots, C$，用 A 乘(35)的第一式，B 乘第二式，…，C 乘第三式，然后将乘积相加，得

$$\begin{aligned}&Ax_{n+k}+By_{n+k}+\cdots+Cz_{n+k}\\ &\quad=a_1(Ax_{n+k-1}+By_{n+k-1}+\cdots+Cz_{n+k-1})\\ &\qquad+a_2(Ax_{n+k-2}+By_{n+k-2}+\cdots+Cz_{n+k-2})+\cdots\\ &\qquad+a_k(Ax_n+By_n+\cdots+Cz_n).\end{aligned} \qquad (36)$$

由序列组(34)的第一个序列乘 A，第二个序列乘 B，…，最后一个序列乘 C，然后按列对应相加，得序列

$$\left.\begin{array}{l}t_1=Ax_1+By_1+\cdots+Cz_1, \\ t_2=Ax_2+By_2+\cdots+Cz_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_n=Ax_n+By_n+\cdots+Cz_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} \qquad (37)$$

由式(36)知，这个序列满足递归关系式(33)。因为 $A, B, \cdots, C$ 是任取的，所以我们可以选定不同的 $A, B, \cdots, C$，而得到不同的序列 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$。

设序列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots \tag{38}$$

满足递归关系式(33)，问题是：能否求出 $A, B, \cdots, C$，使得序列(37)的前 k 项与序列(38)的前 k 项相同？如果可以，根据前面的讨论，对任何自然数 n，有

$$u_n = Ax_n + By_n + \cdots + Cz_n \tag{39}$$

成立。

这样，利用某个序列组(34)，由公式(39)来表示任一满足同一个 k 阶递归关系式(33)的序列就变得可能了（至此仍是一种假设）.实现这一可能性的关键在于求出 $A, B, \cdots, C$ 的值，使得对于任意给定的$u_1, u_2, \cdots, u_k$，下列等式成立：

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + \cdots + Cz_1 = u_1, \\ Ax_2 + By_2 + \cdots + Cz_2 = u_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ax_k + By_k + \cdots + Cz_k = u_k. \end{array}\right\} \tag{40}$$

在这个问题中，$A, B, \cdots, C$ 是未知的，但(40)中等式的个数与递归序列的阶 k 相同，即 $A, B, \cdots, C$ 的个数为 k（与序列组(34)中的序列个数相同）. k 元一次线性方程组(40)的解，取决于方程组的系数 $x_1, y_1, \cdots, z_1, \cdots, x_k, y_k, \cdots, z_k$，也就是取决于递归序列组(34)的各最初的 k 项。例如，任选 $u_1, u_2, \cdots, u_k$，我们假设

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1, \quad y_1 = 0, \quad \cdots, \quad z_1 = 0, \\ x_2 = 0, \quad y_2 = 1, \quad \cdots, \quad z_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = 0, \quad y_k = 0, \quad \cdots, \quad z_k = 1. \end{array}\right\} \tag{41}$$

简化(40)，得

$$\left.\begin{aligned} A &= u_1, \\ B &= u_2, \\ &\cdots\cdots \\ C &= u_k. \end{aligned}\right\}$$

当然，无论方程组(40)右边是何值，我们都可以选择另一组系数，使方程组(40)总有解。例如，设

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1,\ \ y_1 = 1,\ \ \cdots,\ \ z_1 = 1, \\ x_2 = 0,\ \ y_2 = 1,\ \ \cdots,\ \ z_2 = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = 0,\ \ y_k = 0, \cdots, z_k = 1. \end{array}\right\} \qquad (42)$$

简化(40)得

$$\left.\begin{aligned} A + B + \cdots + C &= u_1, \\ B + \cdots + C &= u_2, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ C &= u_k. \end{aligned}\right\}$$

因此，

$$C = u_k,\ \ \cdots,\ \ B = u_2 - u_3,\ \ A = u_1 - u_2.$$

下面我们给出一般性的定理①．

定理　对 k 元线性方程组(40)，不论右边 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 取何值，有且仅有唯一解 $A, B, \cdots, C$ 的充分必要条件是：对应的齐次方程组

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + \cdots + Cz_1 = 0, \\ Ax_2 + By_2 + \cdots + Cz_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ax_k + By_k + \cdots + Cz_k = 0 \end{array}\right\} \qquad (40')$$

有且仅有唯一解 $A = B = \cdots = C = 0$.

---

① 这就是本书中唯一未给出证明的结论。这可在任何一本线性代数的书中找到。——译者注

读者容易断定，定理中所说的条件在特殊情形(41)和(42)是满足的。以后可以看到，这个定理十分有用。我们只需充分利用“一定存在 $x_1,\cdots,z_1,\cdots,x_k,\cdots,z_k$，使得方程组(40)有确定的解”这一事实。

如果已经选定这样的数作为序列组(40)最初的项，那么，根据前面的结论，任何适合递归关系式(33)的序列都可由公式(39)表出，其中的 $A,B,\cdots,C$ 是方程组(40)的解。由 k 个序列构成的序列组(34)称作递归序列的一组基，如果任一满足关系式(33)的序列的项可以利用它由公式(39)表出。

由此可见，每一类递归序列必有基，且它们可以用不同方法来选取。

例如，开始的一些项取为

$$\left.\begin{array}{l}\underbrace{1,0,\cdots,0,}\\0,1,\cdots,0,\\\cdots\cdots\cdots\\\underbrace{0,0,\cdots,1}_{(k)},\end{array}\right\}\text{或}\left.\begin{array}{l}1,1,\cdots,1,\\0,1,\cdots,1,\\\cdots\cdots\cdots\\\underbrace{0,0,\cdots,1}_{(k)}\end{array}\right\}$$

的序列组就是任意的 k 阶递归序列的基。

对这段内容，我们小结如下：

对每一个 k 阶递归关系式，都有无穷多个满足这种关系式的不同的序列。任一这样的序列可由满足这种关系式且构成它的基的某 k 个序列来得到：先对这 k 个序列中的每一个分别乘以某个相应的数 $A,B,\cdots,C$，然后对应相加①。

所以，为了求出 k 阶递归关系式的全体解，只要求出满足这个递归关系式且构成它的一组基的 k 个序列。

---

① 请参阅式（37）。——译者注

为了解释清楚，我们来举例说明。

例1 已知2阶递归关系式

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n.$$

它的基必定由两个序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$; $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$ 组成。我们这样来选取：令 $x_1=1$，$x_2=1$ 及 $y_1=0$，$y_2=1$。因为递归关系式可以改写为

$$u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n,$$

即这个序列相邻两项的差是定值，所以满足这一关系式的序列必然是等差数列。因此，序列$\{x_n\}$是一个公差为0的等差数列，即为

$$1,1,1,\cdots,1,\cdots\ (x_n=1).$$

序列$\{y_n\}$是一个公差为1的等差数列，即为

$$0,1,2,\cdots,n-1,\cdots\ (y_n=n-1).$$

任何满足这个2阶递归关系式的递归序列的项都可表成

$$u_n=Ax_n+By_n=A+B\cdot(n-1),$$

其中 A,B 由

$$u_1=A+B\cdot(1-1),$$
$$u_2=A+B\cdot(2-1),$$

即

$$u_1=A,$$
$$u_2=A+B$$

确定。因此，$A=u_1$，$B=u_2-u_1$。由此推出

$$u_n=u_1+(n-1)(u_2-u_1).$$

这就是满足 $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$ 的递归序列的通项公式。

我们设 $u_1=a$，$u_2-u_1=d$，就得到熟知的等差数列的通项公式：

$$u_n=a+(n-1)d.$$

例2 再来讨论另一个2阶递归关系式

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

取 $x_1=1$，$x_2=1$，就得到熟知的斐波那契序列

$$1,1,2,3,5,8,\cdots.$$

作为构成基的第二个序列$\{y_n\}$，我们取 $y_1=0$，$y_2=1$，这样就有

$$y_3=y_2+y_1=1,\ y_4=y_3+y_2=2,\ y_5=y_4+y_3=3,\ \cdots.$$

在这个序列中，$y_2=x_1$，$y_3=x_2$，$y_4=x_3$，$y_5=x_4$，…，一般地有 $y_n=x_{n-1}(n=2,3,\cdots)$。事实上，如果我们已经知道，对任意的 $n\leqslant m+1$，这些等式都成立。特别地，有 $y_{m+1}=x_m$，$y_m=x_{m-1}$ 成立，对于 y_{m+2} 有

$$y_{m+2}=y_{m+1}+y_m=x_m+x_{m-1}=x_{m-1}.$$

所以，当 $n=m+2$ 时，等式也成立。因而，我们证明了

$$y_n=x_{n-1}\ (n=2,3,\cdots).$$

所以，对于满足关系式 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ 的任一序列，我们得到（式(39)）：

$$u_n=Ax_n+By_n,$$

其中，A,B 由下列等式确定：

$$u_1=Ax_1+By_1=A,$$

$$u_2=Ax_2+By_2=A+B.$$

因此，$A=u_1$，$B=u_2-u_1$，及

$$u_n=u_1x_n+(u_2-u_1)y_n.$$

当 $n\geqslant2$ 时，x_{n-1} 可以替代 y_n，故有

$$u_n=u_1x_n+(u_2-u_1)x_{n-1}\ (n\geqslant2)$$

或

$$u_n=u_1(x_n-x_{n-1})+u_2x_{n-1}.$$

当$n\geqslant3$时，

$$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}\ \text{或}\ x_n-x_{n-1}=x_{n-2},$$

从而有

$$u_n=u_1x_{n-2}+u_2x_{n-1}\ (n\geqslant3).$$

因此，满足关系式$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$的任一序列$\{u_n\}$的通项公式可以利用斐波那契序列由上面推出的公式来表示。特别地，当$u_1=-3$，$u_2=1$（见式(34)前给出的数列）时，

$$u_n=-3x_{n-2}+x_{n-1}\ (n\geqslant 3).$$

§5 递归关系式的特征方程与由等比数列构成的基

5.1 都是单根的情形

现在，我们来证明，在某种极一般的条件下，通过比较k个具有不同公比的等比数列可以找到递归关系式(33)

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots+a_ku_n$$

的基。为此，先来看看在什么条件下，等比数列

$$x_1=1,\ x_2=q,\ \cdots,\ x_n=q^{n-1},\ \cdots\ (q\neq 0)$$

满足关系式(33)。以

$$x_{n+k}=q^{n+k-1},\ x_{n+k-1}=q^{n+k-2},\cdots,x_n=q^{n-1}$$

分别代替$u_{n+k},u_{n+k-1},\cdots,u_n$，代入(33)得

$$q^{n+k-1}=a_1q^{n+k-2}+a_2q^{n+k-3}+\cdots+a_nq^{n-1}.$$

由此得

$$q^k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+\cdots+a_n. \tag{43}$$

所以，等比数列满足k阶递归关系式的充分必要条件(33)是它的公比q满足与(33)式系数完全相同的k次代数方程(43)。

方程(43)叫做递归关系式(33)的特征方程。如果$q=\alpha$是特征方程的一个根（实根或虚根），那么，设

$$x_n=\alpha^{n-1}\ (n=1,2,\cdots), \tag{44}$$

我们得到一个首项 $x_1=1$，公比为 α，且满足关系式(33)的等比数列。又因为 α 是(43)的一个根，所以

$$\alpha^k = a_1 \cdot \alpha^{k-1} + a_2 \cdot \alpha^{k-2} + \cdots + a_k.$$

上式两边乘以 α^{n-1}，其中 n 为任意自然数，得

$$\alpha^{n+k-1} = a_1\alpha^{n+k-2} + a_2\alpha^{n+k-3} + \cdots + a_k\alpha^{n-1}.$$

这表明，序列(44)满足关系式(33)。

因此，对于特征方程(43)的每一个根 $q=\alpha$，相应地有一个公比为 α 的等比数列(44)，满足递归关系式(33)。

为了由此构造出由公比不同的等比数列组成的基，仅需由此能得到足够多个，即 k 个不同的等比数列，因而就是特征方程要有 k 个不同的根。

设特征方程的所有根各不相同：

$$q_1=\alpha,\quad q_2=\beta,\quad \cdots,\quad q_k=\gamma,$$

我们有满足(33)的 k 个等比数列

$$\left.\begin{array}{l} 1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1},\cdots, \\ 1,\beta,\beta^2,\cdots,\beta^{n-1},\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1,\gamma,\gamma^2,\cdots,\gamma^{n-1},\cdots. \end{array}\right\} \tag{45}$$

下面证明，序列组(45)是(33)的基，即对满足(33)的任何序列 $\{u_n\}$，我们都可以求得 $A,B,\cdots,C$，使得对任意 n，

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \cdots + C\gamma^{n-1}. \tag{46}$$

要证明上述结论，只需证明：当 $n=1,2,\cdots,k$ 时，由(46)所得的关于未知数 $A,B,\cdots,C$ 的方程组

$$\left.\begin{array}{l} A+B+\cdots+C=u_1, \\ A\alpha+B\beta+\cdots+C\gamma=u_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A\alpha^{k-1}+B\beta^{k-1}+\cdots+C\gamma^{k-1}=u_k, \end{array}\right\} \tag{47}$$

总有解，不论这些方程的右边取何值。为此，只需相应的齐次方程组

$$\left.\begin{array}{l}A+B+\cdots+C=0,\\A\alpha+B\beta+\cdots+C\gamma=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\A\alpha^{k-1}+B\beta^{k-1}+\cdots+C\gamma^{k-1}=0\end{array}\right\}\qquad(48)$$

有且仅有唯一的零解（参看(40′)）。这一点的确是对的。

事实上，假设(48)有非零解，即满足方程组(48)的 A，$B,\cdots,C$ 中至少有一个（例如A）不为零，为由此推出矛盾，我们构造一个 $k-1$ 次多项式 $M(x)$，当 $x=\beta,\cdots,x=\gamma$ 时等于零，而当 $x=\alpha$ 时等于 1．由于此多项式是 $k-1$ 次．且对 x 的 $k-1$ 个不同的值 $\beta,\cdots,\gamma$ 都等于零，因此

$$M(x)=\mu(x-\beta)\cdots(x-\gamma),$$

其中 μ 为某个待定的值。因当 $x=\alpha$ 时，$M(\alpha)=1$，所以

$$1=\mu(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\gamma),$$

$$\mu=1/(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\gamma)。$$

因此，满足给定条件的多项式为

$$M(x)=\frac{(x-\beta)\cdots(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\gamma)}.$$

去括号并合并同类项得

$$M(x)=m_0+m_1x+\cdots+m_{k-1}x^{k-1}.$$

用 $m_0,m_1,\cdots,m_{k-1}$ 乘以(48)，并逐项相加得

$$A(m_0+m_1\alpha+\cdots+m_{k-1}\alpha^{k-1})$$
$$+B(m_0+m_1\beta+\cdots+m_{k-1}\beta^{k-1})+\cdots$$
$$+C(m_0+m_1\gamma+\cdots+m_{k-1}\gamma^{k-1})=0,$$

或

$$AM(\alpha)+BM(\beta)+\cdots+CM(\gamma)=0.$$

因为 $M(\alpha)=1$，$M(\beta)=0$，$\cdots$，$M(\gamma)=0$，所以$A=0$，与假

设矛盾。

因此，方程组(48)有且仅有零解，以及方程组(47)对任意的$u_1, u_2, \cdots, u_k$有唯一解$A, B, \cdots, C$，而这就意味着(45)是递归关系式(33)的一组基。

这样，我们就证明了，对每一个递归关系式

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\cdots+a_ku_n,$$

当其相应的特征方程

$$q^k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+\cdots+a_k$$

有不同的根$q=\alpha$，$q=\beta$，$\cdots$，$q=\gamma$时，一定存在由公比分别为$\alpha, \beta, \cdots, \gamma$的$k$个等比数列组成的基。换言之，对满足关系式(33)的任一序列$\{u_n\}$，可由方程组(47)求得k个数A，$B, \cdots, C$，使得

$$u_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+\cdots+C\gamma^{n-1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

我们小结一下这段内容。

每个k阶递归关系式都对应有一个系数与其相同的k次代数方程，称为它的特征方程。特征方程的每个根就是适合这个递归关系式的等比数列的公比。如果特征方程的根各不相同，则这k个等比数列就是这个递归关系式的一组基。在这样的情形下，满足这个递归关系式的任何序列就可由若干个等比数列（不超过k个）相加来得到。

下面看一下所得的这些结论的应用。

首先考虑斐波那契序列。它的递归关系式是

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

相应的特征方程(43)为

$$q^2=q+1.$$

解这个方程，得两个不同的实根

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

所以，斐波那契序列的通项公式可表为下述形式

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

为求未知数 A,B，设 $n=1,2$，我们得

$$\left.\begin{aligned} &u_1 = 1 = A + B, \\ &u_2 = 1 = A\alpha + B\beta = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B). \end{aligned}\right\}$$

解这个方程组，得

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad B = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

因此

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

或

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (49)$$

这就是斐波那契序列的通项公式。这个公式看上去很复杂，计算也颇麻烦，但是，使用它却可以得到许多有趣的结果。例如，两个相邻的斐波那契数的平方和也是一个斐波那契数。因为

$$u_n^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2(-1)^n\right],$$

$$u_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} - 2(-1)^{n+1}\right],$$

所以

$$\begin{aligned} &u_n^2 + u_{n+1}^2 \\ &= \frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right\} = u_{2n+1}, \end{aligned}$$

即

$$u_{n+1}^2+u_n^2=u_{2n+1}. \tag{50}$$

例如，

$$u_{13}=u_7^2+u_6^2=13^2+8^2=233.$$

请读者自证斐波那契序列的更一般的公式

$$u_nu_m+u_{n+1}u_{m+1}=u_{n+m+1}. \tag{51}$$

作为公式(49)的又一应用。我们来证明下面的定理。

定理 若自然数$a<b$，则用欧几里得算法来求a和b最大公约数时，需作的除法的次数不超过a写成十进制时所有的数字的个数的5倍。

运用欧氏算法求a和b的最大公约数时，由依次作除法而得到一串等式：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & b=ax^{(1)}+y^{(1)},\\ (2) & a=y^{(1)}x^{(2)}+y^{(2)},\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (k) & y^{(k-2)}=y^{(k-1)}x^{(k)}+y^{(k)},\\ (k+1) & y^{(k-1)}=y^{(k)}x^{(k+1)},\end{array}\right\} \tag{52}$$

且各个余项依次满足不等式

$$a>y'>y''>y'''>\cdots>y^{k-1}>y^k\geqslant 1.$$

在(52)中的最后一个式子中，余项等于零，所以，前一式中的余项$y^{(k)}$就是a和b的最大公约数。因此，k就是求最大公约数所需的除法运算的次数.问题是如何求k的值。为此，我们把数$y^{(k)},y^{(k-1)},\cdots,y^{(1)}$，$a$与斐波那契序列$u_1,u_2,\cdots,u_n$来作比较。我们有$y^{(k)}\geqslant 1=u_2$。又$y^{(k-1)}>y^{(k)}$，所以$y^{(k-1)}\geqslant 2=u_3$。因此，由第$(k)$个等式得出①

$$y^{(k-2)}=y^{(k-1)}x^{(k)}+y^{(k)}\geqslant y^{(k-1)}\cdot 1+y^{(k)}$$

① 不难看出，总有$x^{(j)}\geqslant 1$，$1\leqslant j\leqslant k+1$。——译者注

$$\geqslant u_3+u_2=u_4.$$

这样，就得到了

$$y^{(k)}\geqslant u_2,\quad y^{(k-1)}\geqslant u_3,\quad y^{(k-2)}\geqslant u_4.$$

假定我们已证明下列不等式成立：

$$y^{(k)}\geqslant u_2,\cdots,y^{(m)}\geqslant u_{k-m+2},y^{(m-1)}\geqslant u_{k-m+3}$$

$$(m-1\geqslant 2),$$

那么，由等式 $y^{(m-2)}=y^{(m-1)}x^{(m)}+y^{(m)}$ 得

$$y^{(m-2)}\geqslant y^{(m-1)}\cdot 1+y^{(m)}\geqslant u_{k-m+3}+u_{k-m+2}=u_{k-m+4}.$$

如此下去，最终得到不等式

$$y^{(2)}\geqslant u_k,\quad y^{(1)}\geqslant u_{k+1}.$$

进而，由(52)式的式(2)推得

$$a=y^{(1)}x^{(2)}+y^{(2)}\geqslant y^{(1)}\cdot 1+y^{(2)}\geqslant u_{k+1}+u_k=u_{k+2}.$$

由公式(49)知

$$u_{k+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$$

因此

$$a\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]$$

$$>\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-1\right] \tag{53}$$

$\left(因为\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1，所以\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^{k+2}<1\right)$. 由(53)得

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}<a\sqrt{5}+1<\sqrt{5}(a+1)$$

$$<\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}(a+1)$$

$\Bigg($因为当$\sqrt{5}<3$时，有 $\sqrt{5}<\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 因此

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k < a+1. \qquad (54)$$

我们知道

$$u_5 = 5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\right]$$

$$< \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + 1\right],$$

所以

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 > 5\sqrt{5} - 1 > 10,$$

因此

$$10^k < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5k} < (a+1)^5. \qquad (55)$$

设 a 写成十进制是 n 位数，即有 n 个数字，显然有

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^n,$$

$$a+1 \leqslant 10^n.$$

由此以及不等式(55)得

$$10^k < (a+1)^5 \leqslant 10^{5n}, \qquad (56)$$

即 $k<5n$。

这正是所要求的结果：在欧几里得算法中，逐次相除的次数 k 小于 a,b 中较小的数的十进制数字的位数与5的乘积。上面的论证表明：应用欧几里得算法最复杂的就是 b 与 a 是最相邻的两个斐波那契数这一情形。为了使读者相信这一点，我们来举一个实例。取 $b=u_{20}=6765$，$a=u_{19}=4181$，这里，a 是一个4位数。根据上述定理，欧氏算法所作除法的次数必定小于 $4\times5=20$。事实上，我们需作17步运算才能完成：

(1) $6765=4181\times1+2584$，

(2) $4181=2584\times1+1597$,

(3) $2584=1597\times1+987$,

(4) $1597=987\times1+610$,

(5) $987=610\times1+377$,

(6) $610=377\times1+233$,

(7) $377=233\times1+144$,

(8) $233=144\times1+89$,

(9) $144=89\times1+55$,

(10) $89=55\times1+34$,

(11) $55=34\times1+21$,

(12) $34=21\times1+13$,

(13) $21=13\times1+8$,

(14) $13=8\times1+5$,

(15) $8=5\times1+3$,

(16) $5=3\times1+2$,

(17) $3=2\times1+1$,

(18) $2=1\times2+0$.

这里，从大到小排列的斐波那契数正是逐次除法运算所得的余数．除最后一步外，所有的商都是1，这正是运算步骤如此之多的原因．相邻两个斐波那契数的最大公约数，不用计算就可看出是1(见上面的等式(17))．事实上，由$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$可知，u_{n+2}与u_{n+1}的最大公约数等于u_{n+1}与u_n的最大公约数(为什么？)，所以，任意一对相邻的斐波那契数，其最大公约数是相同的．因而，为了求出它，只要看第一对$u_2=u_1=1$的最大公约数．显见，它等于1．

应用1 求递归序列(16)的通项公式．

$$u_1=5,\ u_2=7,\ u_3=1,\ u_4=3,$$

$$u_5=2,\ u_6=1,\ u_7=3,\ u_8=2,\cdots.$$

其递归关系式为

$$u_{n+3}=u_n\ (n\geqslant 3),$$

特征方程是

$$q^3=1,$$

特征方程的根为

$$\alpha=1,\quad \beta=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \gamma=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

设(16)的通项公式为(见公式(46))

$$\begin{aligned}u_n&=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+C\gamma^{n-1}\\&=A+B\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+C\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

我们可以要求这个公式对任何 n 都成立，而当 $n\geqslant 3$ 时，我们的递归关系式也成立。

已知

$$-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

由棣美弗公式得

$$\begin{aligned}u_n&=A+B\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+C\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\\&=A+(-1)^{n-1}B\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1)-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\right]\\&\quad+(-1)^{n-1}C\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\right]\\&=A+(-1)^{n-1}(B+C)\cos\frac{\pi}{3}(n-1)\\&\quad+\mathrm{i}(-B+C)(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{3}(n-1).\end{aligned}$$

令 $B+C=A_1$，$\mathrm{i}(-B+C)=A_2$，代入上式得

$$u_n=A+A_1(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3}(n-1)$$

$$+(-1)^{n-1}A_2\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\quad(n\geqslant 3).$$

现在，我们仅要去求未知系数 A,A_1,A_2。取 $n=3,4,5$，代入上式，得到一个三元一次方程组

$$u_3=1=A+A_1\cos\frac{2\pi}{3}+A_2\sin\frac{2\pi}{3}=A-\frac{1}{2}A_1+\frac{\sqrt{3}}{2}A_2,$$

$$u_4=3=A-A_1\cos\pi-A_2\sin\pi=A+A_1,$$

$$u_5=2=A+A_1\cos\frac{4\pi}{3}+A_2\sin\frac{4\pi}{3}=A-\frac{1}{2}A_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_2.$$

解此方程组，得

$$A=2,\quad A_1=1,\quad A_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因此

$$u_n=2+(-1)^{n-1}\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(n-1)\frac{\pi}{3}\right]$$

$$=2+(-1)^n\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(n-2)\frac{\pi}{3}\quad(n\geqslant 3).$$

可以看出，这里的通项公式是用与序列的循环特征相一致的三角函数来表示的。

应用 2 求多项式的商的系数的通项公式。

给定两个多项式

$$P(x)=3+x^2-x^5,$$

$$Q(x)=2-x-2x^2+x^3,$$

求 $P(x)$除以 $Q(x)$所得商式的系数。

设商式的系数序列为

$$u_1=D_0,u_2=D_1,\cdots,u_n=D_{n-1},\cdots.$$

前面已讲到，这个序列是一个满足式(20)的递归序列：

$$D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1} - \cdots - \frac{B_k}{B_0}D_n \quad (n \geqslant l-k+1),$$

其中 k,l 分别是 $Q(x)$和 $P(x)$的次数，$B_0,B_1,\cdots,B_k$ 是$Q(x)$的系数。

由所给多项式知：$k=3$，$l=5$，$B_0=2$，$B_1=-1$，$B_2=-2$，$B_3=1$，从而

$$D_{n+3} = \frac{1}{2}D_{n+2} + \frac{2}{2}D_{n-1} - \frac{1}{2}D_n \quad (n \geqslant 5-3+1=3),$$

即

$$D_{n+3} = \frac{1}{2}D_{n+2} + D_{n+1} - \frac{1}{2}D_n \quad (n \geqslant 3).$$

其特征方程为

$$q^3 = \frac{1}{2}q^2 + q - \frac{1}{2}$$

或

$$q^3 - q - \frac{1}{2}(q^2-1) = \left(q - \frac{1}{2}\right)(q-1)(q+1) = 0.$$

其全部根为

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1.$$

因此

$$D_n = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \cdot 1^n + C \cdot (-1)^n \quad (n \geqslant 3).$$

令 $n=3,4,5$，代入上式，得

$$D_3 = \frac{1}{8}A + B - C, \quad D_4 = \frac{1}{16}A + B + C,$$

$$D_5 = \frac{1}{32}A + B - C.$$

这些方程中，不仅 A, B, C 是未知数，而且 D_3, D_4, D_5 也是未知的。为求出这些未知数，我们来作 $P(x)$ 被 $Q(x)$ 除的除法，直到商式中恰好出现 5 次项为止。

$$\begin{array}{l}
3 + x^2 - x^5 \quad \big| \quad 2 - x - 2x^2 + x^3 \\
\text{商：}\ \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x + 2\frac{3}{8}x^2 + 1\frac{3}{16}x^3 + 2\frac{19}{32}x^4 + \frac{51}{64}x^5 \\
\hline
-\left(3 - \frac{3}{2}x - 3x^2 + \frac{3}{2}x^3\right) \\
\hline
\frac{3}{2}x + 4x^2 - \frac{3}{2}x^3 - x^5 \\
-\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^4\right) \\
\hline
4\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^4 - x^5 \\
-\left(4\frac{3}{4}x^2 - 2\frac{3}{8}x^3 - 4\frac{3}{4}x^4 + 2\frac{3}{8}x^5\right) \\
\hline
2\frac{3}{8}x^3 + 4x^4 - 3\frac{3}{8}x^5 \\
-\left(2\frac{3}{8}x^3 - 1\frac{3}{16}x^4 - 2\frac{3}{8}x^5 + 1\frac{3}{16}x^6\right) \\
\hline
5\frac{3}{16}x^4 - x^5 - 1\frac{3}{16}x^6 \\
-\left(5\frac{3}{16}x^4 - 2\frac{19}{32}x^5 - 5\frac{3}{16}x^6 + 2\frac{19}{32}x^7\right) \\
\hline
1\frac{19}{32}x^5 + 4x^6 - 2\frac{19}{32}x^7 \\
-\left(1\frac{19}{32}x^5 - \frac{51}{64}x^6 - \frac{51}{32}x^7 + \frac{51}{64}x^8\right) \\
\hline
4\frac{51}{64}x^6 - x^7 - \frac{51}{64}x^8.
\end{array}$$

因此，

$$D_0=\frac{3}{2},\ D_1=\frac{3}{4},\quad D_2=2\frac{3}{8},\quad D_3=1\frac{3}{16},$$

$$D_4=2\frac{19}{32},\ D_5=\frac{51}{64}.$$

代入上面所得的方程组，得

$$\frac{1}{8}A+B-C=\ 1\frac{3}{16},$$

$$\frac{1}{16}A+B+C=\ 2\frac{19}{32},$$

$$\frac{1}{32}A+B-C=\ \frac{51}{64}.$$

解得

$$A=4\frac{1}{6},\quad B=\frac{3}{2},\quad C=\frac{5}{6}.$$

因此

$$D_n=4\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2}+\frac{5}{6}(-1)^n\quad(n\geqslant 3).$$

这就解决了所提出的问题．由上式可以算出

$$D_6=2\frac{51}{128},\ D_7=\frac{179}{256},\quad D_8=2\frac{179}{512},\cdots.$$

5.2 根全部相同的情形

在上面所举的全部例子中，特征方程的根都是单根．下面讨论与自然数平方和有关的序列．

已知该序列的递归关系式为(见式(32)后的(b))

$$S_{n+4}=4S_{n+3}-6S_{n+2}+4S_{n+1}-S_n,$$

特征方程为

$$q^4=4q^3-6q^2+4q-1$$

或

$$q^4-4q^3+6q^2-4q+1=(q-1)^4=0.$$

它仅有一个四重根$q=1$。所以，我们只求得了一个公比为1的适合上述递归关系式的等比数列。

在这类问题中，我们必须求出其他能与这个等比数列一起构成方程的基的简单的递归序列组，在此例中它们是：

$$0,1,2,3,\cdots,n-1,\cdots;$$

$$0,1,4,9,\cdots,(n-1)^2,\cdots;$$

$$0,1,8,27,\cdots,(n-1)^3,\cdots.$$

（读者很容易证实这个断言）．不要考虑这个需要相当复杂计算的例子了，我们来研究下面的典型例子．

设递归关系式为

$$u_{n+k}=C_k^{k-1}au_{n+k-1}-C_k^{k-2}a^2u_{n+k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}C_k^0a^ku_n, \tag{57}$$

其中 $C_k^{k-1},C_k^{k-2},\cdots,C_k^0$ 是 k 阶二项式系数．相应的特征方程为

$$q^k=C_k^{k-1}aq^{k-1}-C_k^{k-2}a^2q^{k-2}+\cdots+(-1)^kC_k^0a^k.$$

整理得

$$(q-a)^k=0.$$

其解为 k 重根$q=a$。显然有

$$(a-a)^k=a^k-C_k^{k-1}a^k+C_k^{k-2}a^k-\cdots+(-1)^kC_k^0a^k=0. \tag{58}$$

更一般地，当 $m=0,1,2,\cdots,k-1$ 时，有下面的恒等式

$$(a-a)^{k-m}=a^{k-m}-C_{k-m}^{k-m-1}a^{k-m}+C_{k-m}^{k-m-2}a^{k-m}-\cdots+(-1)^{k-m}C_{k-m}^0a^{k-m}=0,$$

或

$$(1-1)^{k-m}=C_{k-m}^{k-m}-C_{k-m}^{k-m-1}+C_{k-m}^{k-m-2}-\cdots+(-1)^{k-m}C_{k-m}^0=0. \tag{59}$$

当 $m=0$ 时，整理(59)得

$$C_k^k - C_k^{k-1} + C_k^{k-2} - \cdots + (-1)^{\mu} C_k^{k-\mu} + \cdots + (-1)^k C_k^0 = 0. \tag{59'}$$

注意，当 $m=1,2,\cdots,k-1$，$0 \leqslant \mu \leqslant k-m$ 时，

$$C_k^{k-\mu} = \frac{k(k-1)\cdots(\mu+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-\mu)}$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{(k-m-\mu+1)\cdots(k-\mu)} C_{k-m}^{k-m-\mu}$$

或

$$k(k-1)\cdots(k-m+1) C_{k-m}^{k-m-\mu}$$
$$= (k-m-\mu+1)\cdots(k-\mu) C_k^{k-\mu}. \tag{60}$$

我们把式(59′)的各项乘以 $k(k-1)\cdots(k-m+1)$，并利用式(60)可把所得的结果写为

$$(k-m+1)\cdots k C_k^k - (k-m)\cdots(k-1) C_k^{k-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^{\mu}(k-m-\mu+1)\cdots(k-\mu) C_k^{k-\mu} + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-m} 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m C_k^0 = 0$$
$$(m=1,2,\cdots,k-1). \tag{59''}$$

现在我们来证明，当 $m=1,2,\cdots,k-1$ 时，等式

$$k^m C_k^k - (k-1)^m C_k^{k-1} + \cdots + (-1)^{\mu}(k-\mu)^m C_k^{k-\mu}$$
$$+ \cdots + (-1)^k 0^m C_k^0 = 0 \tag{61}$$

成立①.

$m=0$ 时，(61)与(59′)相同，当然成立。

运用归纳法，假设当 $m=0,1,\cdots,j$ $(j \leqslant k-2)$时，(61)成立，要由此推出当 $m=j+1$ 时，(61) 也成立。我们运用 $j+1$ 次多项式

$$f(x) = (x-j)(x-j+1)\cdots(x-1)x$$

---

① 我们约定$0^0=1$。——译者注

$$= x^{j+1} - \beta_j x^j - \cdots - \beta_1 x \qquad (62)$$

来证明这一点。当 $m=1,2,\cdots,j$ 时，分别用 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j$ 乘以式(61)，得

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_1 k C_k^k - \beta_1(k-1)C_k^{k-1} + \cdots + \beta_1(-1)^\mu(k-\mu)C_k^{k-\mu} \\
&\qquad\qquad + \cdots + \beta_1(-1)^k \cdot 0 \cdot C_k^0 = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\beta_j k^j C_k^k - \beta_j(k-1)^j C_k^{k-1} + \cdots + \beta_j(-1)^\mu(k-\mu)^j C_k^{k-\mu} \\
&\qquad\qquad + \cdots + \beta_j(-1)^k \cdot 0^j \cdot C_k^0 = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

因为

$$(k-j)\cdots k = f(k),$$

$$(k-j-1)\cdots(k-1) = f(k-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(k-\mu-j)\cdots(k-\mu) = f(k-\mu),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所以，当 $m=j+1$ 时式(59″)可写为

$$f(k)C_k^k - f(k-1)C_k^{k-1} + \cdots + (-1)^\mu f(k-\mu)C_k^{k-\mu} + \cdots + (-1)^k f(0)C_k^0 = 0. \qquad (64)$$

把式(63)中的各式及式(64)逐项相加，得

$$\begin{aligned}
&[\beta_1 k + \cdots + \beta_j k^j + f(k)]C_k^k \\
&\quad - [\beta_1(k-1) + \cdots + \beta_j(k-1)^j + f(k-1)]C_k^{k-1} + \cdots \\
&\quad + (-1)^\mu[\beta_1(k-\mu) + \cdots \\
&\qquad + \beta_j(k-\mu)^j + f(k-\mu)]C_k^{k-\mu} + \cdots \\
&\quad + (-1)^k[\beta_1 \cdot 0 + \cdots + \beta_j \cdot 0^j + f(0)]C_k^0 = 0.
\end{aligned}$$

(62)式可以改写为

$$\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_j x^j + f(x) = x^{j+1}.$$

由以上两式即得

$$k^{j+1}C_k^k-(k-1)^{j+1}C_k^{k-1}+\cdots+(-1)^{\mu}(k-\mu)^{j+1}C_k^{k-\mu}$$
$$+\cdots+(-1)^k\cdot 0^{j+1}\cdot C_k^0=0.$$

这正好就是$m=j+1$时的(61)式。这就证明了当$m=0,1,\cdots,k-1$时，式(61)恒真。

最后，我们考虑次数不高于$k-1$的任意多项式：

$$P(x)=A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\cdots+A_0. \qquad (65)$$

当$m=0,1,2,\cdots,k-1$时，式(61)相应地乘以$A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$，得

$$A_0C_k^k-A_0C_k^{k-1}+\cdots+(-1)^{\mu}A_0C_k^{k-\mu}$$
$$+\cdots+(-1)^kA_0C_k^0=0,$$
$$A_1kC_k^k-A_1(k-1)C_k^{k-1}+\cdots+(-1)^{\mu}A_1(k-\mu)C_k^{k-\mu}$$
$$+\cdots+(-1)^kA_1\cdot 0\cdot C_k^0=0,$$

…………………………………………………………

$$A_{k-1}k^{k-1}C_k^k-A_{k-1}(k-1)^{k-1}C_k^{k-1}+\cdots$$
$$+(-1)^{\mu}A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}C_k^{k-\mu}+\cdots$$
$$+(-1)^kA_{k-1}\cdot 0^{k-1}\cdot C_k^0=0.$$

把以上各式逐项相加，得

$$(A_0+A_1k+\cdots+A_{k-1}k^{k-1})C_k^k$$
$$-[A_0+A_1(k-1)+\cdots+A_{k-1}(k-1)^{k-1}]C_k^{k-1}$$
$$+\cdots+(-1)^{\mu}[A_0+A_1(k-\mu)+\cdots$$
$$+A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}]C_k^{k-\mu}+\cdots$$
$$+(-1)^k[A_0+A_1\cdot 0+\cdots+A_k\cdot 0^{k-1}]C_k^0=0,$$

或

$$P(k)\cdot C_k^k-P(k-1)C_k^{k-1}+\cdots+(-1)^kP(0)C_k^0=0.$$
$$(66)$$

因此，次数不超过$k-1$的任意多项式$P(x)$适合关系式(66)。

特别地，设

$$P(x)=(x+n-1)^m,$$

其中 n 为任意自然数，m 为整数且$0\leqslant m\leqslant k-1$。

这时，式(66)变为

$$(k+n-1)^m C_k^k-(k+n-2)^m C_k^{k-1}+\cdots+(-1)^k(n-1)^m C_k^0=0,$$

或者用 α^{k+n-1}乘以它并用 1 代替 C_k^k，得

$$\begin{aligned}(k+n-1)^m\alpha^{k+n-1}=&C_k^{k-1}\alpha(k+n-2)^m\alpha^{k+n-2}\\&-C_k^{k-2}\alpha^2(k+n-3)^m\alpha^{k+n-3}+\cdots\\&+(-1)^{k-1}C_k^0\alpha^k(n-1)^m\alpha^{n-1}.\end{aligned}\tag{67}$$

比较(67)和(57)，可以发现，下列 k 个序列全都满足递归关系式(57)：

$$\left.\begin{array}{ll}1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1},\cdots & (m=0);\\ 0,\alpha,2\alpha^2,\cdots,(n-1)\alpha^{n-1},\cdots & (m=1);\\ 0,\alpha,2^2\alpha^2,\cdots,(n-1)^2\alpha^{n-1},\cdots & (m=2);\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 0,\alpha,2^{k-1}\alpha^2,\cdots,(n-1)^{k-1}\alpha^{n-1},\cdots & (m=k-1).\end{array}\right\}\tag{68}$$

如果能证明(68)中的这些序列组成基，那么满足(57)的任何序列的通项公式可表为：

$$\begin{aligned}u_n&=[B_0+B_1(n-1)+\cdots+B_{k-1}(n-1)^{k-1}]\alpha^{n-1}\\&=Q(n-1)\alpha^{n-1},\end{aligned}\tag{69}$$

其中$Q(x)=B_0+B_1x+\cdots+B_{k-1}x^{k-1}$是一个次数不超过 $k-1$ 的系数可取任意值的多项式。

要证明(68)是基，只需证明 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 为任意值时，关于 $B_0,B_1,\cdots,B_{k-1}$的 k 元线性方程组

$$B_0+B_1\cdot 0+\cdots+B_{k-1}\cdot 0^{k-1}=u_1,$$

$$B_0 + B_1 \cdot 1 + \cdots + B_{k-1} \cdot 1^{k-1} = u_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_0 + B_1(k-1) + \cdots + B_{k-1}(k-1)^{k-1} = u_k$$

有唯一解，即方程组

$$B_0 = 0,$$

$$B_0 + B_1 + \cdots + B_{k-1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_0 + (k-1)B_1 + \cdots + (k-1)^{k-1}B_{k-1} = 0$$

仅有零解．而上面的方程表明

$$Q(0) = Q(1) = \cdots = Q(k-1) = 0,$$

也就是说，次数不超过$k-1$的方程

$$B_0 + B_1x + \cdots + B_{k-1}x^{k-1} = 0$$

至少有k个不同的根$0,1,2,\cdots,k-1$．因此必有

$$B_0 = B_1 = \cdots = B_{k-1} = 0,$$

这就证明了序列组(68)是满足递归关系式(57)的一组基．

5.3 一般情形

前面我们讨论了两种特殊情形．下面讨论一般情形．

如果递归序列适合一般等式

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \cdots + a_ku_n \quad (u_k \neq 0), \tag{70}$$

它的特征方程

$$q^k = a_1q^{k-1} + a_2q^{k-2} + \cdots + a_k \tag{71}$$

有一个a重根α，一个b重根$\beta,\cdots$，一个c重根γ，其中$a+b+\cdots+c=k$．

在这种最一般的情况下，可以证明，下列k个序列构成基：

$$1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}, \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0, \alpha, 2^{a-1}\alpha^2, \cdots, (n-1)^{a-1}\alpha^{n-1}, \cdots;$$

$$1, \beta, \beta^2, \cdots, \beta^{n-1}, \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0, \beta, 2^{b-1}\beta^2, \cdots, (n-1)^{b-1}\beta^{n-1}, \cdots;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1, \gamma, \gamma^2, \cdots, \gamma^{n-1}, \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0, \gamma, 2^{c-1}\gamma^2, \cdots, (n-1)^{c-1}\gamma^{n-1}, \cdots.$$

因此

$$u_n = Q(n-1)\alpha^{n-1} + R(n-1)\beta^{n-1} + \cdots + S(n-1)\gamma^{n-1}, \tag{72}$$

其中$Q(x), R(x), \cdots, S(x)$分别为某些次数不超过$a-1, b-1, \cdots, c-1$的确定的多项式.

由此得到下面的命题:

命题 任何递归序列的通项u_n都具有这样的形式：一些$n-1$的多项式(或说n的多项式，二者是一样的)与一些等比数列的通项的乘积的和，它们的公比是特征方程(71)的根.

如果特征方程的根是单根，则多项式为常数，因而，递归序列的通项为一些等比数列的通项之和.

这个命题的逆命题亦成立，即

任意序列$\{u_n\}$，如果它的通项公式可表成式(72)，则它是一个递归序列.

对应的特征方程(71)可以用它的根$\alpha, \beta, \cdots, \gamma$(即式(72)中的$\alpha, \beta, \cdots, \gamma$)及其相应的重数$a, b, \cdots, c$(它们分别等于式(72)中的多项式$Q, R, \cdots, S$的次数加1)构造. 因此，就可以

立即推出递归关系式(70)。

例如，给定序列

$$u_n=(n-1)^2\cdot 2^{n-1}+3^{n-1}.$$

与(72)比较，可以发现它的特征方程的根为

$$\alpha=2,\qquad \beta=3,$$

其中α是一个$2+1=3$重根。因此，特征方程为

$$(q-2)^3(q-3)=q^4-9q^3+30q^2-44q+24=0,$$

递归关系式为

$$u_{n+4}=9u_{n+3}-30u_{n+2}+44u_{n+1}-24u_n.$$

请读者自己证明序列$\{u_n\}$满足上面的递归关系。

§6 几个递归序列的和序列的通项公式

现在，我们用几个例子来阐述前面的内容。

我们在本文§2中已讲到：等差数列的各项满足

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n,$$

自然数的平方序列满足

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n,$$

以及自然数的立方序列满足

$$u_{n+4}=4u_{n+3}-6u_{n+2}+4u_{n+1}-u_n.$$

显然，这些关系式都是§5中所讲的关系式

$$u_{n+k}=C_k^{k-1}u_{n+k-1}-C_k^{k-2}u_{n+k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}C_k^0u_n \tag{57'}$$

的特例。

满足(57′)式的任意序列，其通项公式为

$$u_n=B_0+B_1(n-1)+\cdots+B_{k-1}(n-1)^{k-1}. \tag{69'}$$

要求系数 $B_0,B_1,\cdots,B_{k-1}$，只需解下面的k元一次线性

代数方程组

$$\left.\begin{array}{l}B_0 = u_1,\\ B_0 + B_1 + \cdots + B_{k-1} = u_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ B_0 + B_1(k-1) + \cdots + B_{k-1}(k-1)^{k-1} = u_k.\end{array}\right\} \quad (73)$$

在等差数列情形，$k=2$，(69′)可简化为

$$u_n = B_0 + B_1(n-1).$$

代入(73)，得

$$B_0 = u_1, \qquad B_0 + B_1 = u_2.$$

可以看出，$B_0 = u_1$是等差数列的首项，而$B_1 = u_2 - u_1$是等差数列的公差，所以

$$u_n = u_1 + d(n-1).$$

这就是熟知的等差数列的通项公式。

在自然数的平方及立方序列中，无需计算，我们就可以得出其通项公式分别为$u_n = n^2$，$u_n = n^3$。但是，运用(69′)及(73)去推导等差数列以及自然数的平方序列与立方序列的求和公式，却十分有趣。

§3中已经证明过：如果序列$\{u_n\}$的各项满足

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n,$$

则和序列$\{S_n\}$($S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \cdots$)满足(见式(30))

$$S_{n+k+1} = (1+a_1)S_{n+k} + (a_2 - a_1)S_{n+k-1} + \cdots + (a_k - a_{k-1})S_{n+1} - a_k S_n.$$

显然，在式(57′)的情形应有

$$a_1 = C_k^1,\ a_2 = -C_k^2, \cdots, a_k = (-1)^{k-1} C_k^k.$$

所以

$$1 + a_1 = 1 + C_k^1 = C_{k+1}^1,$$

$$a_2 - a_1 = -(C_k^2 + C_k^1) = -C_{k+1}^2,$$

$$a_3 - a_2 = C_k^3 + C_k^2 = C_{k+1}^3,$$

……………………………………

$$a_k - a_{k-1} = (-1)^{k-1}(C_k^k + C_k^{k-1}) = (-1)^{k-1}C_{k+1}^k,$$

$$-a_k = (-1)^k C_k^k = (-1)^k C_{k+1}^{k+1}.$$

因而$\{S_n\}$满足的递推关系可改写为

$$S_{n+k+1} = C_{k+1}^1 S_{n+k} - C_{k+1}^2 S_{n+k-1} + \cdots + (-1)^k C_{k+1}^{k+1} S_n,$$

或

$$S_{n+k+1} - C_{k+1}^1 S_{n+k} + C_{k+1}^2 S_{n+k-1} - \cdots + (-1)^{k+1} C_{k+1}^{k+1} S_n = 0.$$

因此，如果序列$\{u_n\}$满足k阶递归关系式(57′)，则相应的和序列$\{S_n\}$满足同样形式的$k+1$阶递归关系式。特别地，因为等差数列、自然数平方序列、自然数立方序列相应的k分别为2,3,4，所以，在与它们各自的和序列所相应的上面的式(57′),(69′),(73)中，必须分别取k为3,4,5。

应用 3 等差数列的求和公式。

根据刚才所说，这时，S_n可由式(69′)(取$k=3$，以S_n代替u_n)来表示：

$$S_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2.$$

系数B_0, B_1, B_2由方程组

$$B_0 = S_1 = u_1,$$

$$B_0 + B_1 + B_2 = S_2 = u_1 + u_2 = 2u_1 + d,$$

$$B_0 + 2B_1 + 2^2 B_2 = S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 3u_1 + 3d$$

确定。解这个方程组，得

$$B_0 = u_1, \quad B_1 = u_1 + \frac{1}{2}d, \quad B_2 = \frac{1}{2}d.$$

代入求和公式，得

$$S_n = u_1 + \left(u_1 + \frac{1}{2}d\right)(n-1) + \frac{1}{2}d(n-1)^2$$

$$=nu_1+\frac{1}{2}d(n-1)n$$

$$=\frac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}$$

$$=\frac{n[u_1+u_1+(n-1)d]}{2}$$

$$=\frac{n(u_1+u_n)}{2}.$$

应用 4　自然数的平方和公式.

在式(69′),(73)中取$k=4$,并用S_n代u_n,得

$$S_n=B_0+B_1(n-1)+B_2(n-1)^2+B_3(n-1)^3,$$

且

$$B_0=S_1=1,$$

$$B_0+B_1+B_2+B_3=S_2=1+2^2=5,$$

$$B_0+2B_1+4B_2+8B_3=S_3=1+2^2+3^2=14,$$

$$B_0+3B_1+9B_2+27B_3=S_4=1+2^2+3^2+4^2=30.$$

解上述四元一次方程组得

$$B_0=1,\quad B_1=2\frac{1}{6},\quad B_2=1\frac{1}{2},\quad B_3=\frac{1}{3}.$$

所以

$$S_n=1+\frac{13}{6}(n-1)+\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3$$

$$=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3$$

$$=\frac{n(1+3n+2n^2)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

应用 5　自然数的立方和公式。这个和可表为

$$S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

请读者自己推导这个公式。

最后，我们来看一个例题。

考虑序列 $a,2a^2,3a^3,\cdots,na^n,\cdots(a\neq 0,a\neq 1)$。其通项公式是

$$u_n=na^n(n=1,2,3,\cdots).$$

因为

$$\begin{aligned}2au_{n+1}-a^2u_n&=2a(n+1)a^{n+1}-a^2na^n\\&=(n+2)a^{n+2}=u_{n+2},\end{aligned}$$

所以很容易看出

$$u_{n+2}=2au_{n+1}-a^2u_n.$$

因为 $k=2$，$a_1=2a$，$a_2=-a^2$，所以和序列$\{S_n\}(S_1=a$，$S_2=a+2a^2$，$S_3=a+2a^2+3a^3,\cdots)$满足(见式(30))

$$\begin{aligned}S_{n+3}&=(a_1+1)S_{n+2}+(a_2-a_1)S_{n+1}-a_2S_n\\&=(2a+1)S_{n+2}-(a^2+2a)S_{n+1}+a^2S_n,\end{aligned}$$

从而，相应的特征方程为

$$q^3=(2a+1)q^2-(a^2+2a)q+a^2.$$

容易断定 $q=a$ 适合上述方程。用 $q-a$ 除它得商式

$$q^2-(a+1)q+a,$$

因此，特征方程的其余两根满足方程

$$q^2-(a+1)q+a=0,$$

它们是$a,1$。这样，特征方程有一个重数为 $a=2$ 的重根 a 和一个单根$\beta=1$。

在式(69)中，我们用S_n代u_n，并把 $a=a$，$Q(x)=B_0+B_1x$——一次多项式，$\beta=1$，$R(x)=C_0$——常数代入，得

$$S_n=[B_0+B_1(n-1)]a^{n-1}+C_0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

取$n=1,2,3$就得到确定系数B_0,B_1,C_0的方程组：

$$\left.\begin{aligned}&B_0+C_0=S_1=a,\\&(B_0+B_1)a+C_0=S_2=a+2a^2,\\&(B_0+2B_1)a^2+C_0=S_3=a+2a^2+3a^3.\end{aligned}\right\}$$

解这个方程组，得

$$B_0=\frac{a^3-2a^2}{(a-1)^2},$$

$$B_1=\frac{a^2}{a-1},$$

$$C_0=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}S_n&=[B_0+B_1(n-1)]a^{n-1}+C_0\\&=\frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}\\&=\frac{u_na^2-(u_{n+1}-u_1)}{(a-1)^2}.\end{aligned}$$

结 束 语

这篇文章旨在让读者了解递归序列的多样性和它们在数学中的地位。同时，也指出递归序列与它们的最简单形式——等比数列和自然数的幂序列(特别地，自然数序列是一个算术数列)没有太大的不同，它们可以用这些最简单的序列来表示。

然而，即使在初等数学中，非递归序列也常常遇到，其中之一就是素数序列

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,\cdots,$$

这是数学中最重要的序列之一。这个序列的深刻而复杂的性质，是数论研究的一个专题。

许多初等函数的值构成的序列也不是递归序列。如序列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

(这是函数$y=1/x$在 $x=1,2,3,4,\cdots$时的值组成的序列)。又如

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots;$$

$$\log 1, \log 2, \log 3, \log 4, \cdots, \log n, \cdots$$

(这分别是函数$y=\sqrt{x}$和$y=\log x$的值序列)，它们都不是递归序列。

这些及类似的序列①(包括递归序列)都是上面提到的数学的一个分支——有限差分法的内容。

最后要指出的是，在初等数学，特别是在高等院校的分析课程中，收敛序列(即序列有有限的极限)具有特殊重要的位置。对这部分内容的研究是极限论中最重要的问题，是分析学的基础。这时序列个别项的性质至多具有次要的意义，而重要的是序列极限的存在性及极限值。

我们认为，以上的说明对于帮助读者正确地认识到这样一点是十分必要的：本文中讲的递归序列理论，无论从研究的对象还是从由它得到的各种关系来看，都仅是一般序列理论②中的特殊而又内容不多的一章。

(王明舟译　潘承彪审校)

① 这里是指由所谓解析函数(它的最简单情形就是初等函数)值组成的序列。

② 即级数理论。——译者注

坐　标　法①

A.S.Smogorzhevsky

引　　言

应用代数研究几何图形的性质，在几何学的发展中曾起了重要的作用并且形成了一门独立的学科——解析几何。解析几何的出现是与它的基本方法——坐标法的发现紧密相联系的。

所谓一个点的坐标是指这样一些数，由它们可确定此点在一给定的直线上，或者一给定的平面(乃至一曲面)上，或者一给定的空间中的位置。所以，如果我们知道在地球表面上一点的地理坐标——纬度和经度，我们就可以知道此点在地球表面上的位置。

为了得到一个点的坐标，我们必须知道一些参考点，由这些参考点出发进行测量。对于地理坐标的情形，赤道和零子午线上的点皆是参考点。

如果给定了参考点，并且也指出了用这些参考点求出确定一个点的位置的数，即坐标的方法，那么我们就说，给定了一个坐标系。

通过方程描述几何图形(见第四节)是坐标法的一个特有的性质，同时它又使得代数方法能够被应用于进行几何学的

① 本文根据 Mir Publishers Moscow 出版的《Little Mathematics Library》中的小册子《Method of Coordinates》(Translated from the Russian by Ram S. Wadhwa, 1980)英文版译出。

研究和求解几何问题。

坐标法使几何学的研究具有代数的特性后，就将代数学的最重要的特点——求解问题的方法的统一性转移给了几何学。在算术和初等几何中，通常人们不得不寻找解决每一个问题的特殊方法，但是在代数和解析几何中，是以一个共通的方案为依据来求解所有的问题，而这个共通的方案对任何一个问题都是很容易适用的。可以这样说，解析几何相对于初等几何与代数相对于算术，它们所处的地位是相同的。坐标法的主要的重要性在于，为了求解问题它把原来属于代数的方法转移给了几何学，从而有了很多共同之处。不过，应该告诫读者，不要完全拒绝初等几何的应用。因为在很多情形中，它帮助我们得到漂亮的解题方法，这些方法比用坐标法获得的解法要简洁得多。坐标法的另一显著特点在于，应用它我们可以避免急于作出一个复杂的空间图形的直观图像。

在坐标概念的实际应用中，我们常将研究的对象设想成为一个点，此对象的坐标可能只是近似地给出。一个对象的给定的坐标，意味着被这些坐标描述的点是这个对象中的某一个点，或者是非常接近于这个对象的一个点。

本书受篇幅和目的限制，我们只能对坐标法的基本论据和它的简单的应用进行讨论。书中对通过方程描述几何图形给予了相当多的关注，因对于初学者而言，这正是易于引起大量困难之处。对于这些问题的阐述是随着广泛地解决一些实例的过程进行的。

§1　直线上点的坐标

引入坐标法的最基本的情形是与确定在一条直线上的点的位置相联系的。我们将从这一情形开始叙述坐标法。

我们在一条直线上标出两个任意的但不同的点O和E（图1），并取截距OE作为长度的单位①。

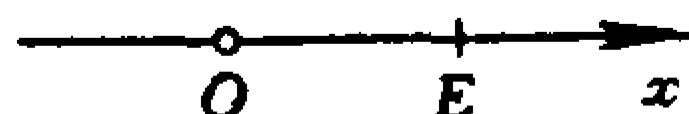


图 1

直线OE上的每一个点都对应一个数，这个数称为给定点的坐标，它是按照以下方法确定的：当点P与点E在O点的同侧，点P在直线OE上的坐标是一个正值，等于截段OP的长度；当点P与点E不在O点的同侧，点P在直线OE上的坐标是一个负值，其绝对值等于截段OP的长度；点O的坐标等于零。

如果这些条件都满足，直线OE就称为数轴或坐标轴。O点称为坐标原点。包含具有正坐标的点的数轴部分称为轴的正部分；包含具有负坐标的点的数轴部分称为轴的负部分。

在给定的坐标轴上的每一个点都有其确定的坐标；而且，在同一坐标轴上的两个不同点的坐标是不一样的。另一方面，每个实数都是给定坐标轴上的一个确定的点的坐标。例如，点E的坐标是$+1$，而数-1则是点E关于O点对称的点的坐标。符号$E(1)$，$A\left(-2\frac{1}{3}\right)$，$B(x)$，$C(x_1)$，$D(x_2)$等表明

① 点O和E可以这样选择，使截距OE等于一个给定的长度单位，例如1cm。

数1，$-2\frac{1}{3}$，$x, x_1, x_2, \cdots$分别是点 $E, A, B, C, D, \cdots$的坐标。

从O点沿数轴向点E移动的方向称为数轴（或坐标轴）的方向，通常用箭头表示（图1）。

§2　平面内点的坐标

我们在一个平面内构造两条互相垂直的数轴 Ox 和Oy，它们的交点是坐标原点。我们分别称轴Ox和 Oy 是x 轴和 y 轴①，同时，它们所在的平面称为Oxy平面。我们认为两个坐标轴的长度单位是一样的。

Ox轴和Oy轴把Oxy平面分为四个象限，它们相应于坐标轴方向的编号如图2所示。

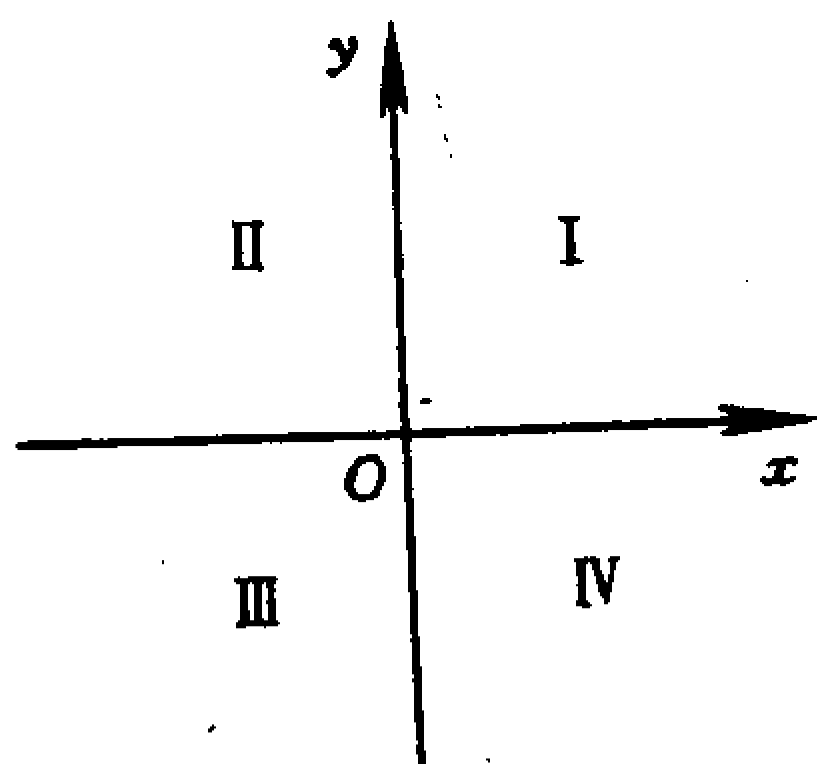


图　2

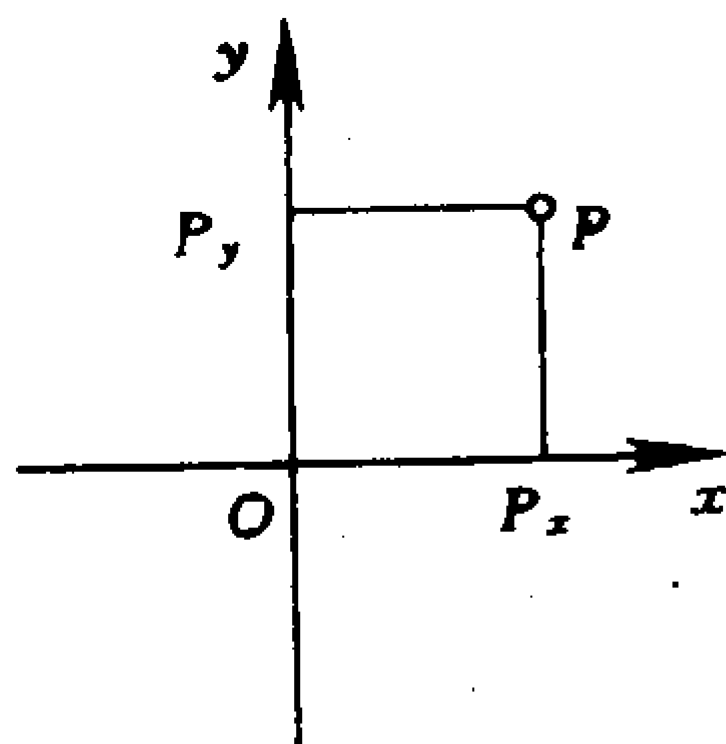


图　3

我们考虑平面Oxy上一点P，P_x和P_y 是点P向 Ox 轴和 Oy 轴引的垂足，亦即点P在这些轴上的垂直投影。我们用 x 表示P_x 在 x 轴上的坐标，用 y 表示 P_y 在 y 轴上的坐标。数 x 和 y 称为点P的坐标，表示为$P(x,y)$。这种类型的坐

① 轴Ox和Oy也可以叫做坐标轴或坐标的轴。

标称为笛卡儿直角坐标①。

所以，在一个平面中确定点 P 的坐标导致分别在两数轴上确定两个点(P_x 和 P_y)的坐标。

点P_x的坐标 x 称为点 P 的横坐标；点 P_y 的坐标 y 称为点 P 的纵坐标。如果点 P 位于 Ox 轴上，则其纵坐标为零；如果点 P 位于 Oy 轴上，则其横坐标为零。O 点的横、纵坐标皆为零。

图 4 所示是点在不同象限中其坐标的符号：左边是横坐标的符号，右边是纵坐标的符号。

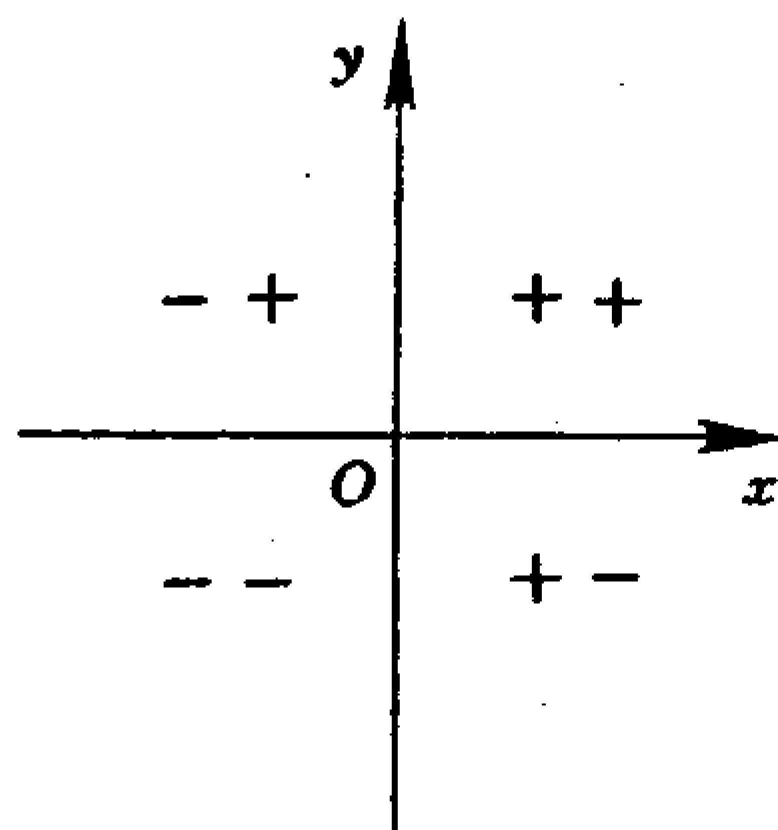


图 4

现在我们来指出，如果知道了点 P 的坐标 x 和 y，如何确定点 P。我们根据P_x的横坐标 x 在 Ox 轴上标出点P_x，根据P_y的纵坐标 y 在Oy轴上标出点 P_y(见图 3)。然后，通过P_x对Ox轴作垂线，通过P_y 对Oy轴作垂线。这两条垂线的交点即为我们想要得到的点 P。

上面的作图可以用下面的方法进行修改(图 5)：通过点 P_x对 Ox 轴画一条垂线，然后在垂线上以坐标 y 的绝对值为长度截取一截段P_xP，而且，如果$y>0$，则从点P_x向上取，

① 源于17世纪著名的哲学家和数学家R.笛卡儿(René Descartes)。

如果 $y<0$，则从点P_x向下取①。如果 $y=0$，则点 P 与点 P_x 重合。

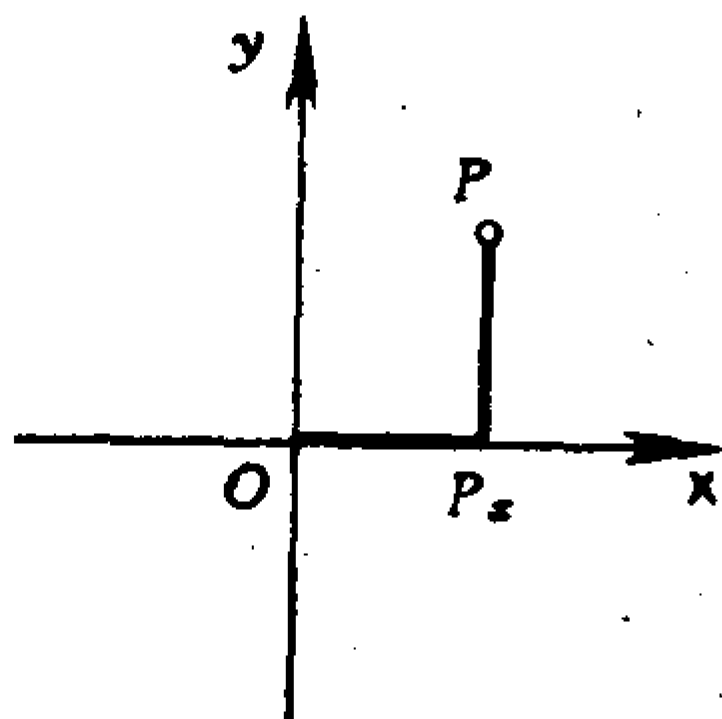


图 5

在以上构造的基础上，我们可以这样说，一个点的坐标指出了从坐标原点到给定点的一条路径：知道了点 P 的横坐标 x，我们可以找到这条路径的OP_x部分，而点 P 的纵坐标 y 则给出了第二部分 P_xP。

顺便地，我们要说明，坐标的想法并非只是数学家的概念：它已经被人们从实践中借用，而且坐标系的原始形式甚至被那些不熟悉数学的人使用过。举个例子，我们回忆著名的19世纪俄国诗人涅克拉索夫(N.Nekrasov)的一首诗《在俄罗斯谁能快乐而自由？》中的一个片段：

“顺着大路一直下去，
数到第三十棵电线杆，
然后转进树林，
再前进一里。
那时你们就会到达
一片平坦的小草坪，
上有两株青松。

① 更确切地说，如果 $y>0$，点P和Oy轴的正半轴必须位于Ox 轴的同侧；如果$y<0$，则位于异侧。以后，我们不给出详尽的描述，都认为Ox轴的正半轴位于Ox轴负半轴的右侧，Oy 轴的正半轴在 Oy 轴的负半轴的上方。

在青松下面，
埋藏着一只匣子，
你们必须将它挖起。”①

诗中的“30”和“1”即是小草坪的坐标（在定义一个物体的坐标的意义上——见引言）；1俄里取为长度的单位（图 6 ）。



图 6

§3 基本问题

通常，一个复杂问题的求解常常可归结为一些简单问题的求解；其中有一些简单问题是经常遇到的，并且还因它们极其简单而著名，称这些简单问题为基本问题．在这一节中，我们将要考虑两个基本的几何问题：求两点之间的距离

① 涅克拉索夫著，楚图南译（据 Juliet M. Soskice 英文译本转译），人民文学出版社，1959，第15—16页．

和确定一个给定了顶点的三角形的面积．因为在解析几何中一个点是被其坐标定义的，所以对所述问题的求解归结为寻找一些公式，由它们通过给定点的坐标以求出所要的量．

问题 1　求给定两点之间的距离．

在平面Oxy上给定两点 $A(x_1, y_1)$和 $B(x_2, y_2)$．从这两点向Ox轴作垂线AA_x和BB_x，向Oy轴作垂线AA_y和BB_y(图7)．线段 AB 的长度用 d 表示．

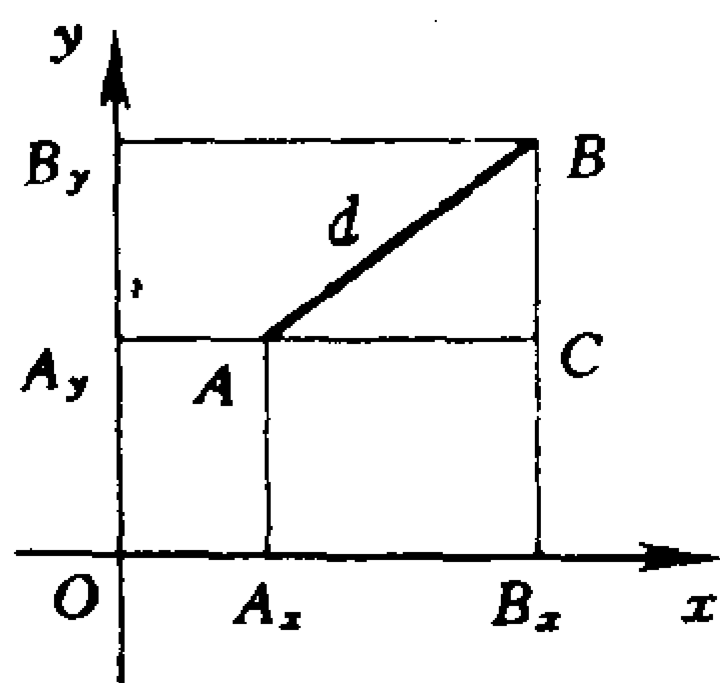


图　7

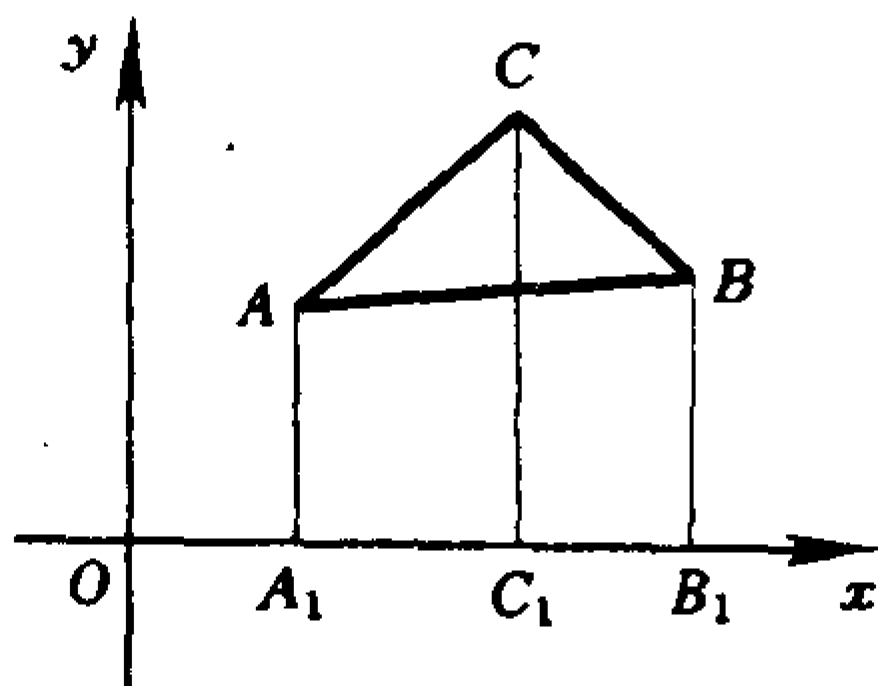


图　8

设直线AA_y和BB_x相交于点C．因为三角形 ABC是直角三角形，我们有

$$d = AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}. \quad (1)$$

考虑到

$$OA_x = x_1, \quad OB_x = x_2,$$

$$OA_y = y_1, \quad OB_y = y_2,$$

$$AC = A_xB_x = OB_x - OA_x = x_2 - x_1,$$

$$CB = A_yB_y = OB_y - OA_y = y_2 - y_1,$$

由(1)得到：

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

可以证明，公式(2)对于处在任何位置的点A和B都是适用的．

问题 2　根据三角形的顶点的坐标确定其面积．

点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$是三角形的三个顶点。我们从这三个点向Ox轴引垂线AA_1，CC_1和BB_1（图 8）。显而易见，三角形 ABC 的面积S 可以用梯形 AA_1B_1B，AA_1C_1C，CC_1B_1B 的面积来表示：

$$S = S_{AA_1C_1C} + S_{CC_1B_1B} - S_{AA_1B_1B}.$$①

因为

$$AA_1 = y_1,\quad BB_1 = y_2,\quad CC_1 = y_3,$$
$$A_1B_1 = x_2 - x_1,\quad A_1C_1 = x_3 - x_1,$$
$$C_1B_1 = x_2 - x_3,$$

于是有

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1),$$

$$S_{CC_1B_1B} = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3),$$

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1).$$

所以

$$S = \frac{1}{2}[(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)].$$

经过简化，我们得到

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \qquad (3)$$

我们要指出，公式(3)对于顶点在任何位置的三角形皆

---

① $S_{AA_1C_1C}$，$S_{CC_1B_1B}$和 $S_{AA_1B_1B}$ 分别表示梯形 AA_1C_1C，CC_1B_1B 和AA_1B_1B 的面积。——译者注

适用，并且对符号①也是正确的。不过从上面所述的推导中它们不是显而易见的。

§4 几何图形的方程

我们在一个平面内标记出有限个点或无限个点。这些被标记的点形成了一个平面几何图形。如果我们可以给出这些在平面内被标记的点，则这个图形就被定义了。

这些被指明的点可以用铅笔或者墨水笔标记出来，例如，当我们用一个圆规描绘一个圆或者用一把尺子画一条直线②就是这样做的。用轨迹的观点可以确认哪些点被标记了，例如，当我们在平面上用一些点的轨迹来定义一个圆的同时，就说这些点到一给定点的距离等于定长。为了上述目的，我们采用解析几何中创造性的方法，即下面所述。

我们在平面内的笛卡儿直角坐标系中作Ox和Oy轴。给定一个包含量x和y③或者两者之一的方程，而且仅仅挑选那些x坐标和y坐标满足给定方程的点。这些被挑选出来的点构成了某一个图形；这个给定的方程称之为这个图形的方程。

所以，解析几何中的一个方程实际起一筛选的作用：去

---

① 用公式(3)计算出的值可能是负的，但是它的绝对值等于三角形的面积。——原作者著

通常规定，在以上确定的平面直角坐标系中，当A、B、C按逆时针方向排列时，三角形面积为正，反之为负。公式(3)的符号与此规定是一致的。——译者注

② 严格说来，我们标记的不是这些点，而是纸上这样的部分，在其上我们感兴趣的那些点可被看作动点。

③ 用代数学采用的术语，这样的方程称为含有两个未知量的方程（如果只含有量x或y中的一个，则称为含有一个未知量的方程）。

除不需要的点而保留构成我们感兴趣的图形上的点。

注意，在一个图形的方程中，量 x 和 y 称为变量。因为一般地说，当我们将图形中的一点移至另一点时它们是变化的(当然，如果图形所包含的点不少于两个点)。除了变量 x 和 y，方程还可以包含常量，它们中的一些或者全部皆可以用字母表示。

含有变量 x 和 y 的方程我们用下列一般形式写出：

$$f(x,y)=0, \tag{4}$$

这里 $f(x,y)$① 表示一个包括变量 x 和 y 或者二者之一的数学式。

根据前面所说的，我们认为**方程(4)将某一图形定义为一组点，其笛卡儿直角坐标满足这个方程。**

从解析几何的这个基本观点出发，不难得到如下结论：如果一个给定点 P 的坐标满足方程(4)，则点 P 属于用方程(4)定义的图形 F，否则点 P 不属于图形 F。

我们来考虑几个简单的例子。

例1 方程

$$y-x=0$$

或者，换句话说

$$y=x \tag{5}$$

定义了一条直线，它是由两坐标轴的正部分所构成的角的等分线(图9)。

实际上，在这条直线上的点 $P(x,y)$ 与坐标轴是等距离的。如果直线在第一象限，则点 P 到 Ox 轴和 Oy 轴的距离分

---

① 读作"x 和 y 的函数"。其它字母如 F,φ：$F(x,y),\varphi(x,y)$ 等可以用来代替 f。像这样的表示式的例子有：$y-x, x^2+y^2-4, x\sin y, \dfrac{x+y}{x-y}$，等等。

别等于 y 和 x；如果直线在第三象限，则点 P 到 Ox 轴和 Oy 轴的距离分别等于 $-y$ 和 $-x$。在两种情况中，点 P 的坐标都满足方程（5）。另一方面，一个不位于所述直线上的点，其坐标互不相等。

用相似的方法，我们可知方程

$$y=-x$$

定义了一条直线，它是由两坐标轴的正部分构成的角的邻角的等分线（图10）。

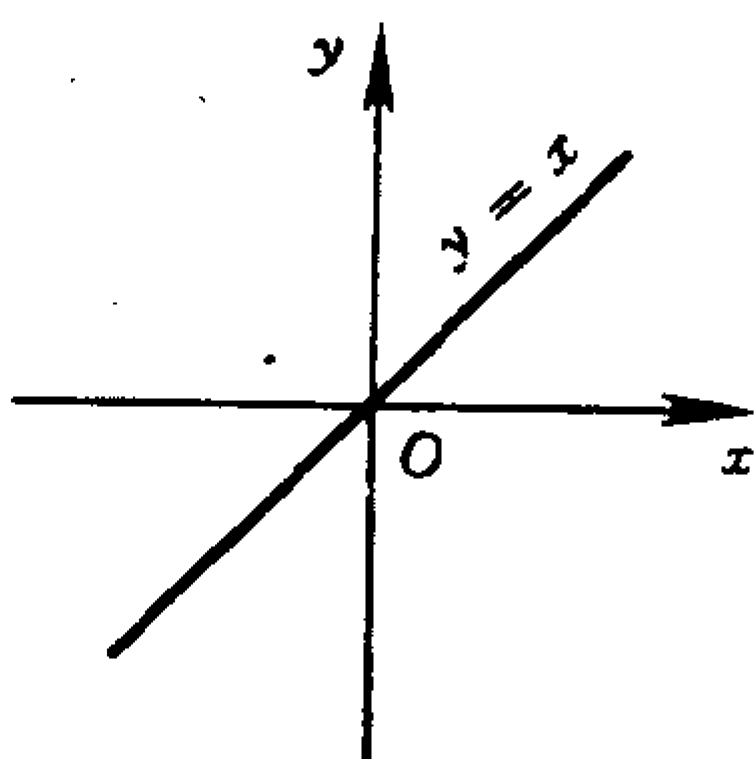


图 9

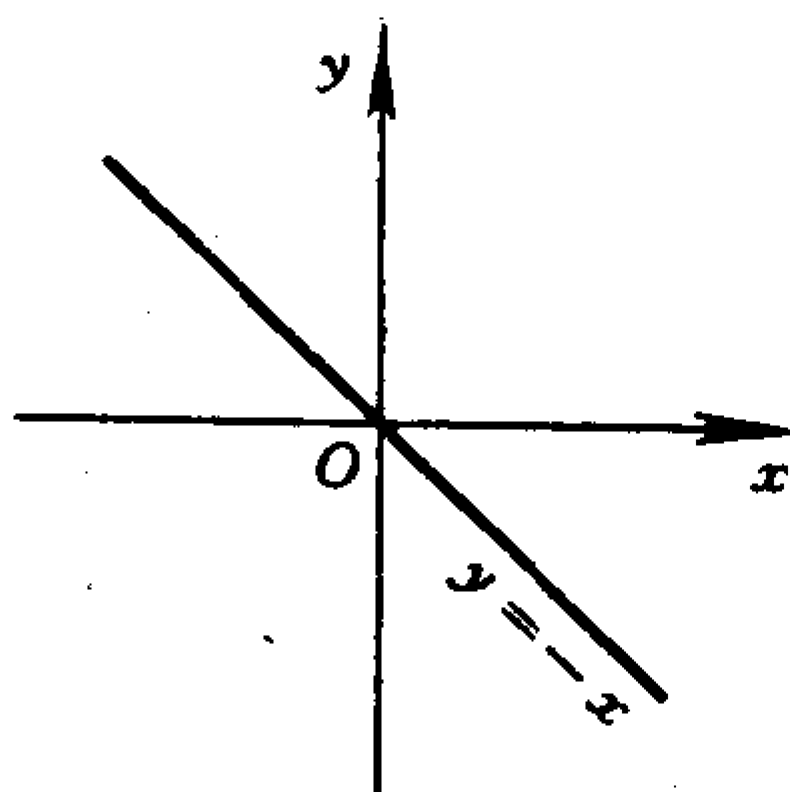


图 10

例 2 方程

$$y=b \tag{6}$$

定义了一条平行于 Ox 轴的直线。如果 $b>0$，这条直线位于 Ox 轴的上方；如果 $b<0$，这条直线位于 Ox 轴的下方；如果 $b=0$，这条直线与 Ox 轴重合。

注意，方程(6) 没有包含变量 x，这意味着它没有对 x 值加以任何限制，即 x 值可以是任意的。

现在我们仔细考虑 $b=0$ 的情况，也就是说考虑方程

$$y=0. \tag{7}$$

这个方程表明在平面内的所有点中，我们必须选出并且只能选出这样一些点，其与 Ox 轴的距离等于零，或者说这

些点皆位于 Ox 轴上。因此，方程（7）定义了 Ox 轴。

例 3 方程

$$x=a$$

定义了一条平行于 Oy 轴的直线。如果 $a=0$，这条直线与 Oy 轴重合。

例 4 设点 $M(a,b)$ 是一半径为 r 的圆的圆心（图11）。我们在此圆周上任取一点 $P(x,y)$。由于线段 MP 的长度等

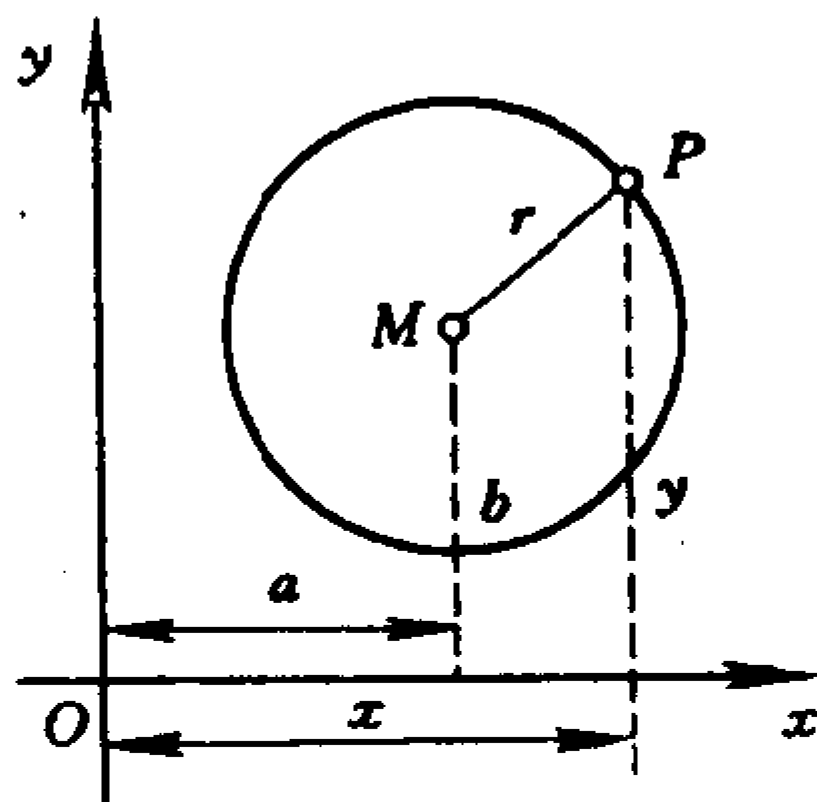


图 11

于 r，我们由公式(2)得到

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

于是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{8}$$

因而方程(8)是半径为 r 的圆的方程，其圆心的坐标是 (a, b)。特别地，如果圆心与坐标原点相重合，则 $a=b=0$，并且方程(8)改为下列形式

$$x^2+y^2=r^2.$$

举例来说，我们考虑方程

$$x^2+y^2=25, \tag{9}$$

也可以将其改写为下列形式

$$y=\pm\sqrt{25-x^2}. \tag{10}$$

现在我们来求出少量的点，使得这些点的坐标满足方程(10)，并将它们画出来．首先，我们列出一个表．在表的左栏填写被任意给出的x值；然后，在右栏填写根据公式(10)计算出的相应的y的值．

x	y
0	± 5
± 1	$\pm\sqrt{24}\approx\pm 4.9$
± 2	$\pm\sqrt{21}\approx\pm 4.6$
± 3	± 4
± 4	± 3
± 5	0

表给出了属于用方程(9)定义的圆的点的坐标．这些点在图12中被绘制出来．如果我们给定变量x的值不仅为整数值，而且还有分数值，例如± 0.1，± 0.2等，则我们可以获得更多的在给定圆周上的点．

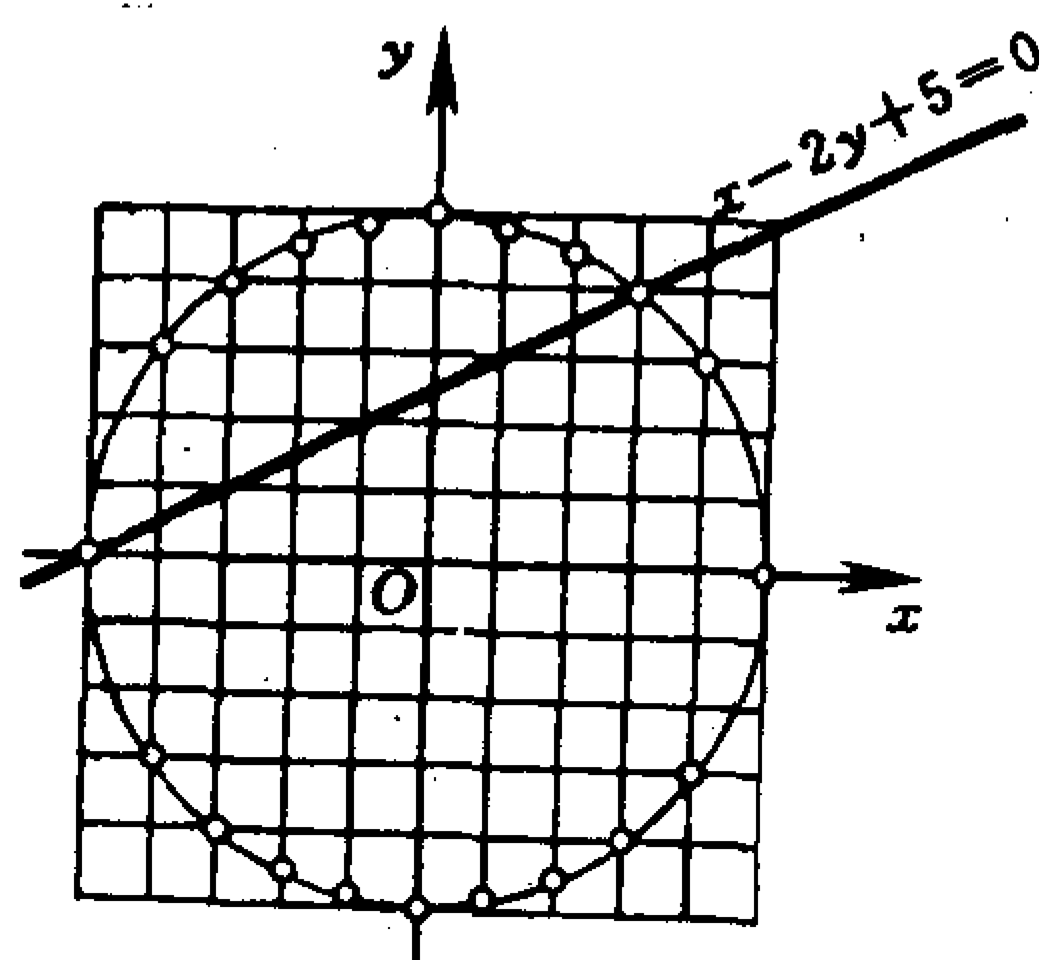


图 12

我们看到，在平面内任意一点的坐标都是实数。所以在所给的例子中，如果$x<-5$或$x>+5$，则不可能求出y，因为此时y将是虚值。

§5 直线的方程

我们考虑一个含有变量x和变量y，或者含有二者之一的一次方程。显然，这样的方程可以表示为下面的形式

$$Ax+By+C=0, \tag{11}$$

这里A,B和C皆为常数，而且量A和B中至少有一个不等于零。我们假设$A\neq 0$。

现在我们来证明方程（11）表示一条直线。作为证明的基础，我们引用一个显而易见的事实：当且仅当三角形的所有顶点皆位于同一条直线上时，此三角形的面积等于零。

设变量y有两个不同的值y_1和y_2，并且由方程(11)求出变量x的相应的值x_1和x_2。因为方程(11)中x的系数不等于零，因而x_1和x_2是可以求出的。故点$L(x_1,y_1)$和$M(x_2,y_2)$是属于图形(11)①的。又因为$y_1\neq y_2$，因此点L和M是不同的点。我们来考虑另一任意点$N(x_3,y_3)$。相继地把L,M,N代入式：$Ax+By+C$中并且计算出它们的值，我们得到下列三个等式：

$$Ax_1+By_1+C=0,$$
$$Ax_2+By_2+C=0,$$
$$Ax_3+By_3+C=a.$$

前两个等式的右边等于零，因为点L和M的坐标满足方程

① 为简单起见，我们经常以"图形$f(x,y)=0$"或者简单的用定义给定图形的方程序号来代替"由方程$f(x,y)=0$定义的图"。

(11)。如果点N属于图形(11)，则a为零，否则a不为零.

我们用y_2-y_3乘第一个等式的两边，用y_3-y_1乘第二个等式的两边，用y_1-y_2乘第三个等式的两边，然后把得到的等式相加。我们就得到了下面的关系式

$$2A\cdot S+B(y_1y_2-y_1y_3+y_2y_3-y_1y_2+y_1y_3-y_2y_3)$$
$$+C(y_2-y_3+y_3-y_1+y_1-y_2)=a(y_1-y_2),$$

其中A的系数为$2S$，S见公式（3），它是三角形LMN的面积。上式经简化，得到

$$2A\cdot S=a(y_1-y_2) \qquad (12)$$

其中，如上面已提到的，$A\neq0$，$y_1-y_2\neq0$。如果点N属于图形(11)，那么$a=0$，这时我们从方程（12）得出S也等于零，因而点N在直线LM上。现在我们假设N是直线LM上任意的一个点，则$S=0$。这时由方程（12）知，a也必等于零，从而，点N属于图形(11)。

所以，图形(11)上的每一个点皆位于直线LM上,同时，位于直线LM上的每一个点也属于图形(11)。因而方程(11)定义了一条直线。证毕。

相反地，现在我们来证明：任何一条直线的方程可以写成式(11)的形式。设点$P(x_1,y_1)$和$Q(x_2,y_2)$位于一条给定的直线上。方程

$$(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0 \qquad (13)$$

是一次的，因而它定义了一条直线。又因为点P和Q的坐标满足方程(13)，所以这条直线是PQ。

由上可知,作出一个由一次方程所定义的图形是不难的.如同上面所述，因为这个图形是一条直线，因而只要求得这条直线上的两个点，将这两个点画出，过这两点所画的直线即是所定义的图形。

例如，考虑方程

$$x+y=5. \quad (14)$$

不难看出，点 $P(5,0)$ 和 $Q(0,5)$ 属于直线（14）。它被绘于图13中。

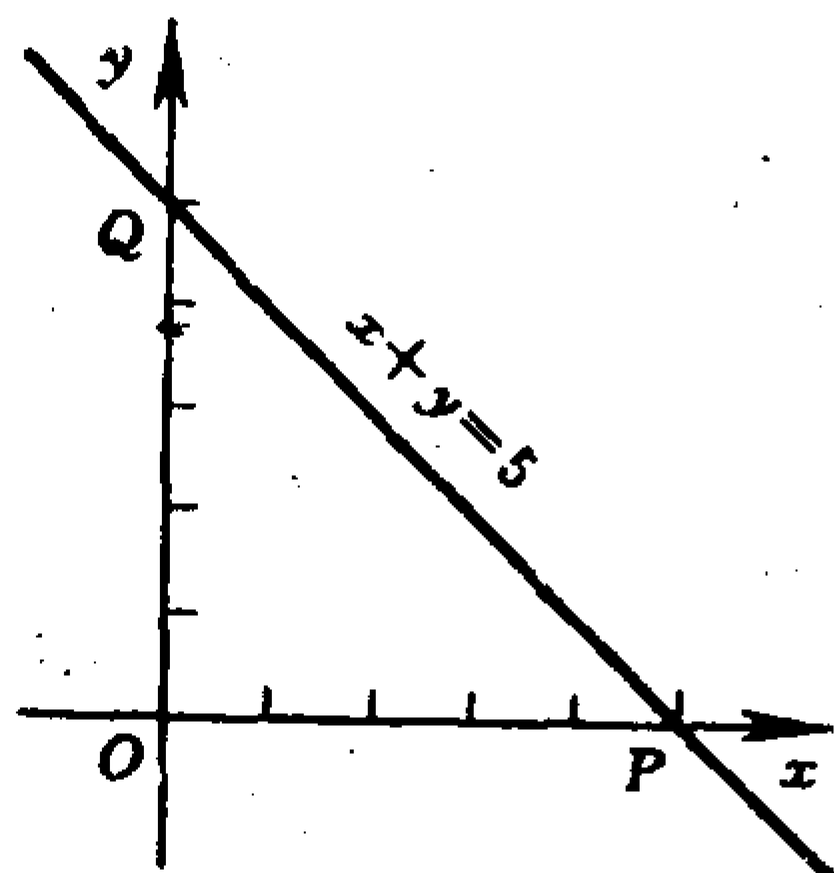


图 13

我们再考虑一个例子。

设已知方程

$$y=3. \quad (15)$$

我们给变量 x 以两个任意的值，例如，$x=-1$ 和 $x=2$。在这两种情形中皆有 $y=3$。因此，点 $P(-1,3)$ 和 $Q(2,3)$ 皆位于直线（15）上。这条直线是平行于 Ox 轴的直线，这一点是可以事先看出的，因为方程(15)是方程 $y=b$（见第四节中例2）的特殊情况。

§6 作为求解几何问题的方法之一的坐标法

作为坐标法应用的实例，我们将考虑三个问题的求解。它们中的每一个问题我们都需要画一个圆，从解析几何的观

点有，这等价于写出所求圆的方程或者确定此圆的半径和其圆心的坐标。

对每一个问题我们将给出两个解法：第一个解法采用坐标法，第二个解法采用初等几何的方法。第一种解题方法的特征是，解题过程遵循一个共同的布署并且在想法上是相似的。而第二种解题方法极少有共同点并且是建立在应用不同定理的基础上的。这个事实是相当重要的，它表明应用坐标法使得寻求解题方法变得简单多了，尽管这只体现于这样几个特殊的例子中。

问题 1 通过点 $A(1,1),B(4,0),C(5,1)$ 画一圆.

解法一 所求圆的方程形式为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{16}$$

（见公式(8)）。

因为点 A,B,C 在所求的圆周上，因此它们的坐标满足方程(16)。分别将这些已知点的坐标代入方程(16)，我们得到下列方程

$$(1-a)^2+(1-b)^2=r^2,$$
$$(4-a)^2+b^2=r^2,$$
$$(5-a)^2+(1-b)^2=r^2.$$

由此我们得到 $a=3$，$b=2$，$r=\sqrt{5}$。从而方程

$$(x-3)^2+(y-2)^2=5$$

即为我们所求的圆。

解法二 作线段 AB 和 BC 的中垂线①。它们的交点即为所求圆的圆心。

问题 2 通过点 $A(4,1)$和$B(11,8)$ 画一个相切于 Ox轴

① 关于一个线段的中垂线就是通过其中点并且垂直于该线段的直线。

的圆。

解法一 显然，所求的圆位于 Ox 轴之上方，并且由于它相切于 Ox 轴，因此圆心的纵坐标等于其半径，即 $b=r$。于是，所求圆的方程有下列形式

$$(x-a)^2+(y-r)^2=r^2$$

或者

$$(x-a)^2+y^2-2ry=0.$$

将点 A 和 B 的坐标分别代入上述方程，我们得到方程组

$$\begin{cases}(4-a)^2+1-2r=0,\\(11-a)^2+64-16r=0.\end{cases}$$

由此得到 $a_1=7$，$a_2=-1$，$b_1=r_1=5$，$b_2=r_2=13$。所以，有两个圆满足此问题的条件（图14）：

$$(x-7)^2+(y-5)^2=25$$

和

$$(x+1)^2+(y-13)^2=169.$$

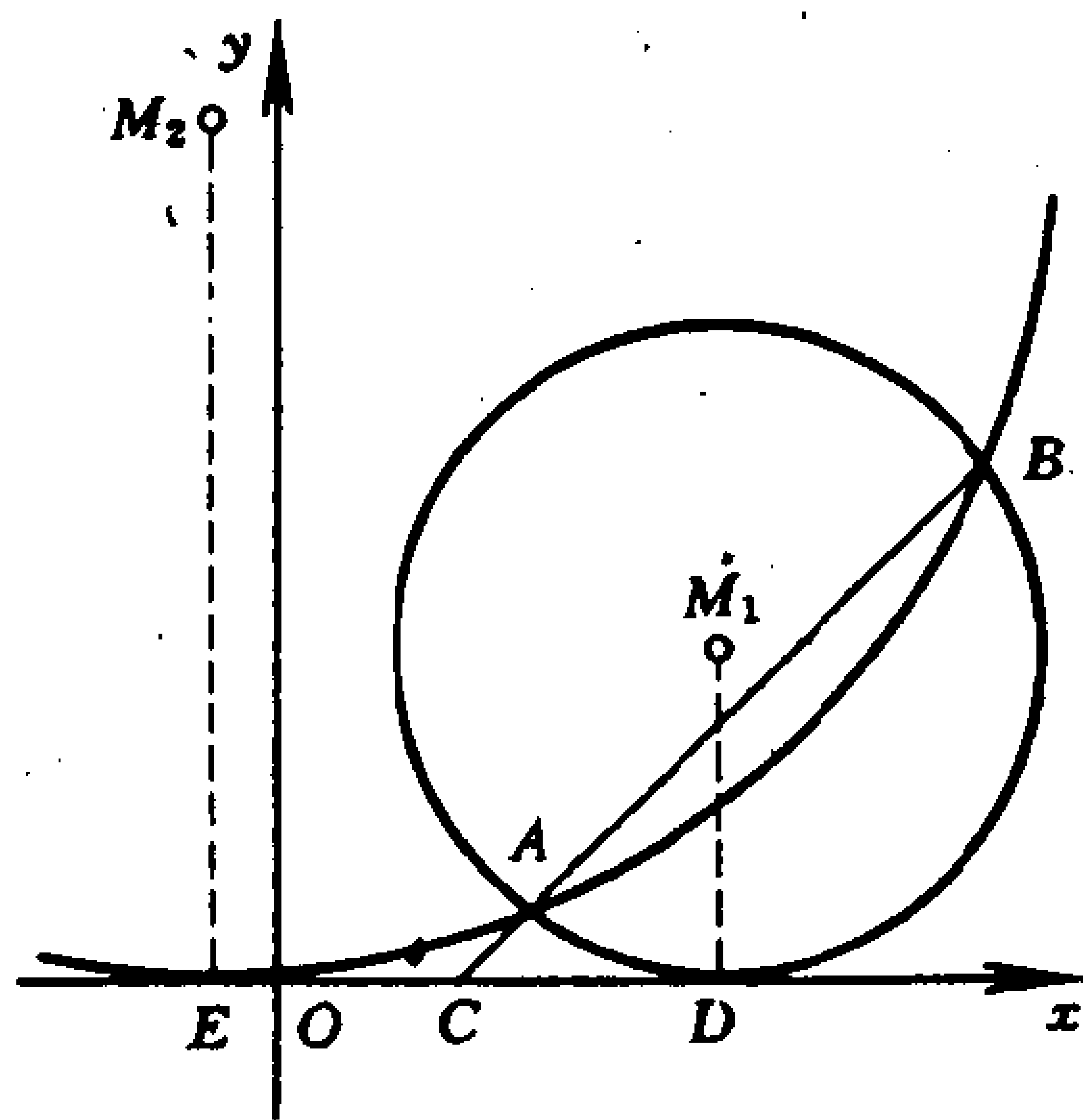


图 14

解法二 我们画一条直线 AB。用 C 表示这条直线与 Ox 轴的交点。在 C 点的两边沿着 Ox 轴分别截取相等的线段 CD 和 CE，它们的长度等于线段 CA 和 CB 的几何平均值（图

14)。

通过点 A,B,D 的圆满足此问题 的条件。实际上，线段 CD 是这个圆的切线，因为它是割线 CB 和圆外部分 CA的几何平均值。相似地，我们可以确 保 通过点 A,B 和E 的圆也满足方程的条件。

问题 3　通过点 $A(2,1)$画一圆相切于两个坐标轴。

解法一　显然，所求的圆位于第一象限；而且由于它与 Ox 和 Oy 轴相切，圆心的坐标等于 它的半径，即 $a=b=r$。所以，所求圆的方程的形式为

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2.$$

将点A的坐标代入方程，得到

$$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2,$$

或者，经过简化得

$$r^2-6r+5=0.$$

所以，$r_1=1$，$r_2=5$。于是，我们得到两个满足条件的圆(图15)：

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

和

$$(x-5)^2+(y-5)^2=25.$$

解法二　我们用相似法解决这个问题。画一条直线 OA，并且在第一象限任意画一圆，使其与 Ox 轴和 Oy轴相切（在图15中用虚线表示）。因而它的圆心S在第一象限角的平分线上。

设直线 OA 与圆相 交 于 点 M和N。我们画直线 SM 和 SN，并且通过点A 分别画平行于 SM 和 SN 的两条直线，它们分别与角平分线 OS 相交于点P和Q，即：$AP\parallel SM$，$AQ\parallel SN$。点P和Q即为我们所求圆的圆心。这种作图的正确性是根据相似定理而得到的。

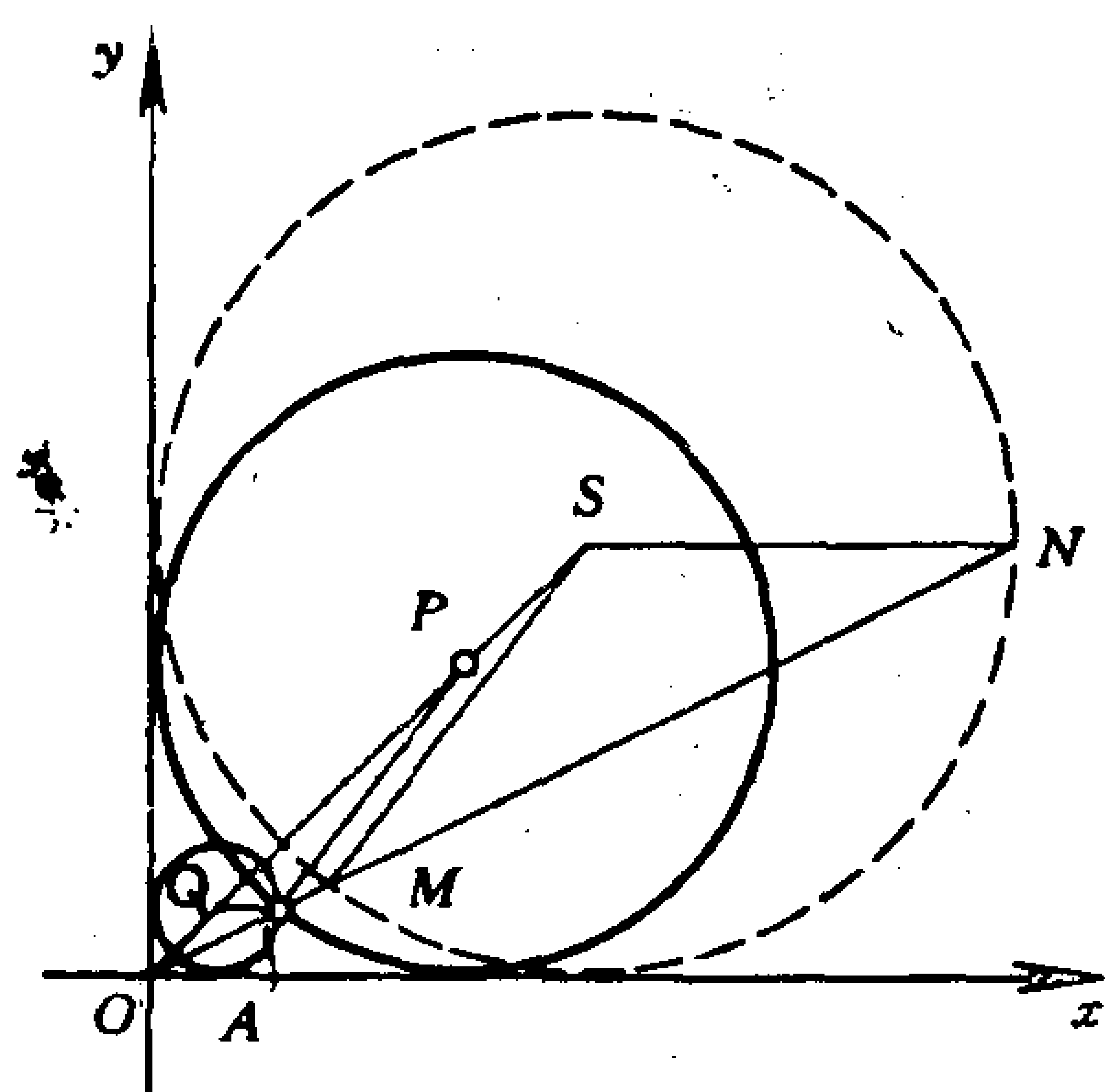


图 15

§7 坐标法的一些应用

1. 求两个图形的公共点

现在我们来指出如何求图形F和Φ的公共点，描述它们的方程为

$$f(x,y)=0, \tag{17}$$

$$\varphi(x,y)=0. \tag{18}$$

设点$P(x_1,y_1)$是所求点之一。因为它属于两个已知图形，因此它的坐标同时满足方程(17)和(18)。相反地，如果我们能找到变量x和y的这样的值x_1和y_1，它们同时满足方程(17)和(18)，那么坐标为x_1和y_1的点就是图形F和Φ的公共点。显然，这些值是通过解方程组(17)和(18)而确定的。

因此，求两个图形的公共点的几何方法，归结为解含有两个未知量的两个方程的方程组的代数方法。

因而，为了求出两个图形的公共点，必须将它们的方程

联合求解；每一组解给出了这些图形的一个公共点的坐标。

例如，联合求解方程

$$x^2+y^2=25 \tag{19}$$

和

$$x-2y+5=0, \tag{20}$$

我们求出了直线(20)与圆(19)的交点的坐标。

由方程(20)我们得到

$$x=2y-5.$$

由此式和方程(19)，我们有

$$(2y-5)^2+y^2=25.$$

经过简化，我们得到

$$y^2-4y=0,$$

由此解出 $y_1=0$，$y_2=4$。接着我们又解出 $x_1=-5$，$x_2=3$。因而，给定的圆和直线相交于点 $P(-5,0)$和 $Q(3,4)$ （见图12)。不难验算点 P 和 Q 的坐标满足方程(19)以及方程(20)。

2. 将坐标法应用于方程的图解法

我们可以通过联合解两个图形的方程来求出它们的公共点的坐标。相反地，我们能够由两个含未知量 x 和 y 的方程定义的图形，用求出它们的公共点坐标的方式来求出这两个方程的根。这些考虑形成了各种实用的简便的图解法的基础。

解方程的图解法常常给出根的近似值，其精确度不高，但是在大多数实际应用上是足够的。

现在我们来考虑两个例子。

例 1 为了解一个一次方程组

$$Ax+By+C=0$$

和

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

我们画出由这些方程定义的直线，然后通过直接测量求出它们的公共点的坐标，当然需要考虑坐标的符号。

例 2 为了用图解法解三次方程

$$x^3 + px + q = 0, \tag{21}$$

我们在坐标纸上精确地画出曲线

$$y = x^3, \tag{22}$$

称此曲线为*立方抛物线*。然后，我们先在直线

$$y = -px - q \tag{23}$$

上取两个点，再画出这条直线。

这两条曲线上的公共点的横坐标将是方程(21)的根。现在，用 ξ, η 表示曲线(22)和(23)的公共点的坐标，那么，由等式

$$\eta = \xi^3 \quad 和 \quad \eta = -p\xi - q$$

可得出

$$\xi^3 = -p\xi - q \quad 或者 \quad \xi^3 + p\xi + q = 0.$$

因此 ξ 是方程(21)的根。

上述方法仅仅可以确定(21)类型的三次方程的实根。

求解的大部分劳动是耗费在为作出立方抛物线 $y = x^3$ 的图形上。但是这个图形可以被使用好几次，因为几条由(23)类型的方程定义的直线都可以画在此图形上，因此一个图形可以求解一些(21)类型的方程。而且，一旦我们有了直线方程(23)，没有必要去画出它；只要求出位于其上的两个点的坐标就足够了。然后在图上标出这两个点，将直尺的边缘与这些点重合，找出直尺边缘与曲线(22)相交的点的横坐标即可。

图16给出了下列方程

$$x^3 - x + 0.2 = 0 \tag{24}$$

和

$$x^3+2x-4=0 \tag{25}$$

的图解法。

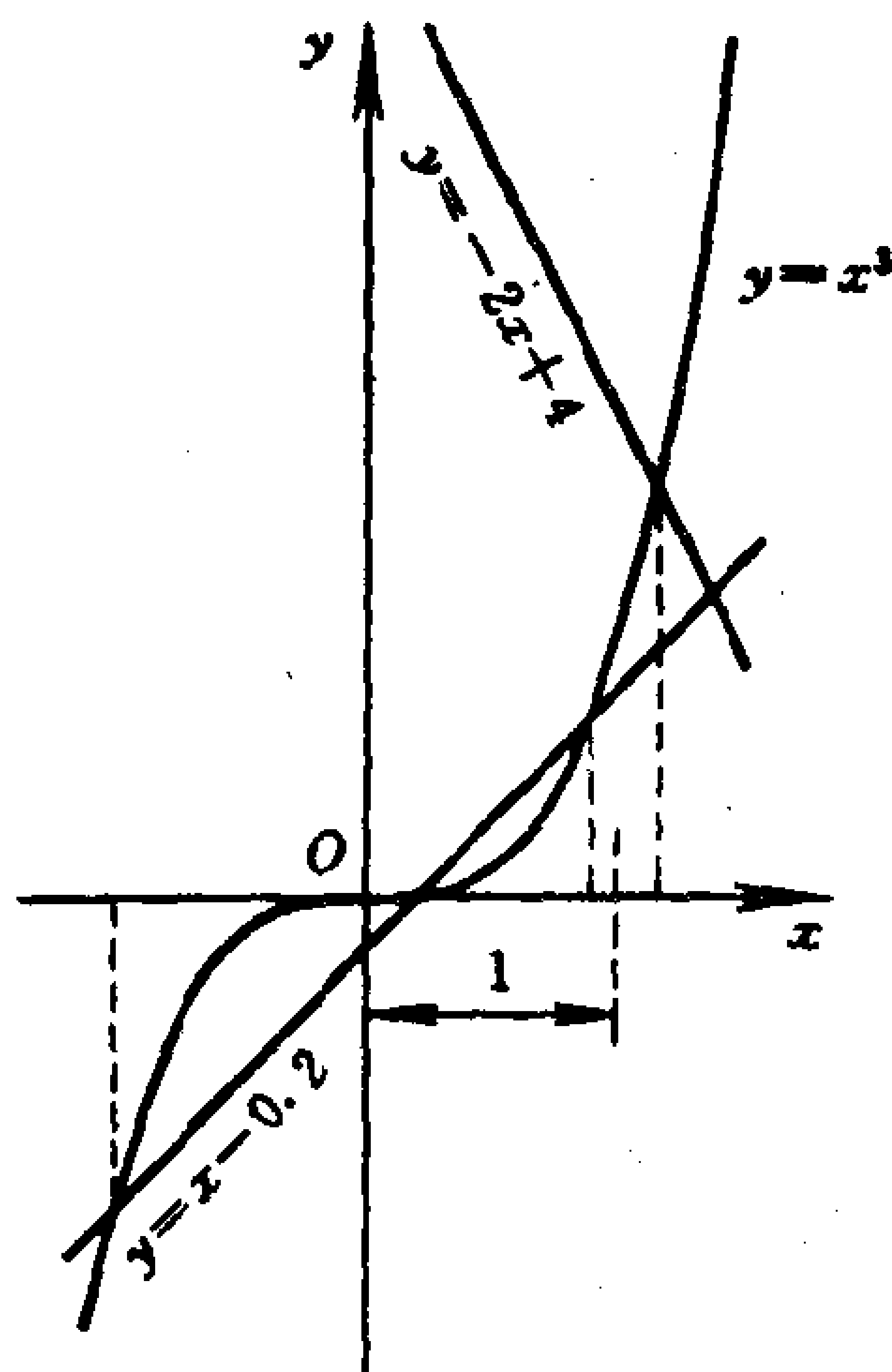


图 16

这里，根据上面的叙述，画出立方抛物线$y=x^3$和直线$y=x-0.2$及$y=-2x+4$。从图中我们求出了方程(24)的根的近似值：-1.07，$+0.2$，$+0.9$和方程(25)的实根的近似值$+1.2$。因为立方抛物线(22)与直线$y=-2x+4$仅有一个公共点，所以方程(25)也仅有一个实根。

3. 一些用方程描述图形的实例分析

一般地说，对用方程描述的图形进行研究是一个复杂的问题，它要求应用较高级的数学方法。然而，在某些情况下，这个问题可以有简单的解决办法。例如，如果一个图形由一个一次方程定义，那么，我们知道；它代表一条直线。

在下面给出的例子中，我们来推导抛物线的方程，并且研究它的一些性质。

抛物线是这样的一条曲线，此曲线上的点与一给定点（焦点）及一给定直线（准线）是等距离的。

设抛物线的焦点 F 的坐标为 $x=0$，$y=a(a>0)$，并设其准线 l 的方程为 $y=-a$（图17）。如果点 $P(x,y)$ 是这条抛物线上的任意一点，Q 是由 P 到 l 的垂足，那么

$$FP=QP. \tag{26}$$

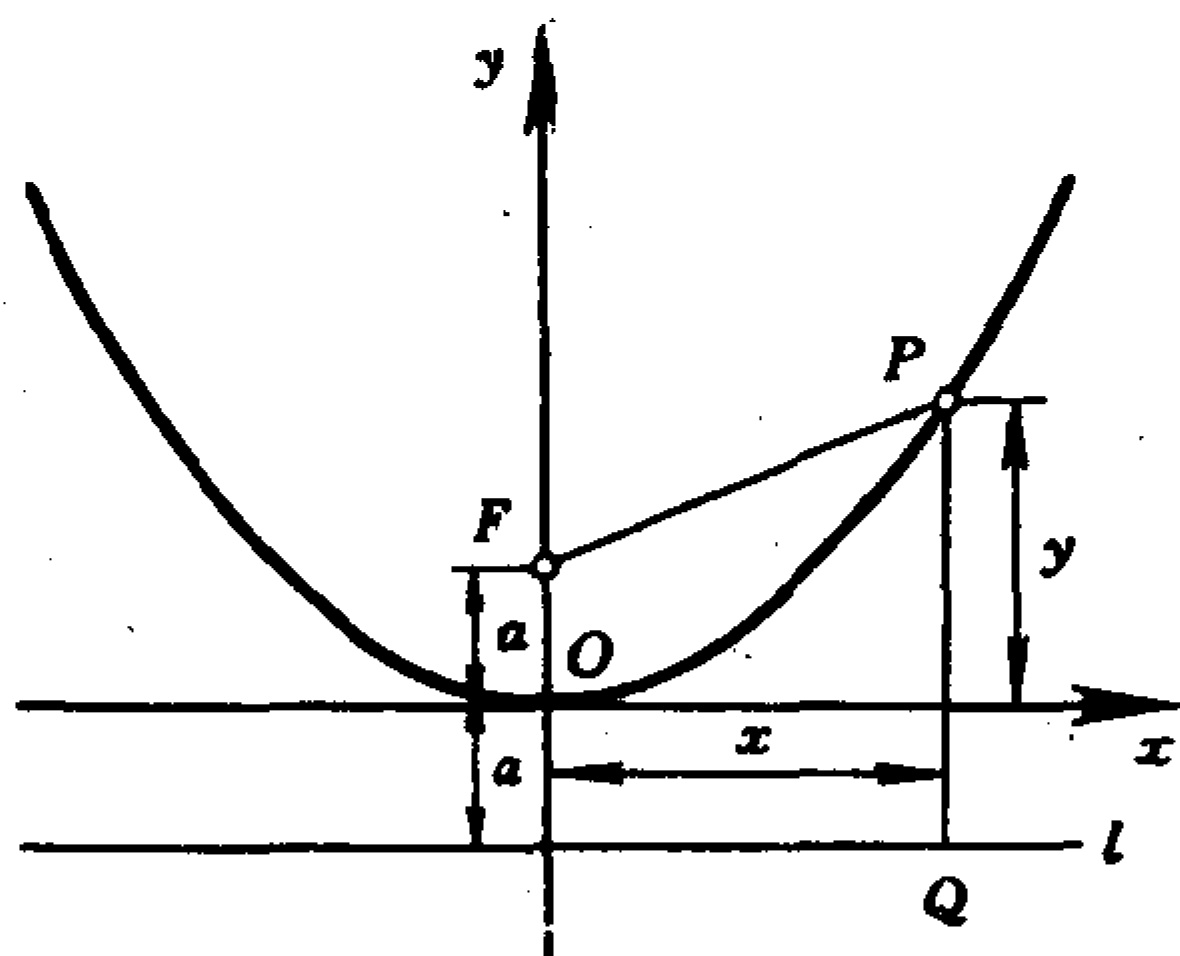


图 17

显然，$QP=y+a$。利用公式(2)，我们求出

$$FP=\sqrt{x^2+(y-a)^2}.$$

所以，方程(26)可以改写为

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2}=y+a.$$

由此，我们得到

$$x^2+y^2-2ay+a^2=y^2+2ay+a^2,$$

简化后得

$$x^2=4ay. \tag{27}$$

现在我们来考虑抛物线(27)的一些性质。由方程(27)我们看到，如果 $x=0$，则 $y=0$；如果 $x\neq0$，则 $y>0$。由此，我们

得出结论：抛物线(27)通过坐标原点，并且它的其他所有的点都在 Ox 轴的上方。

抛物线(27)是关于 Oy 轴对称的。实际上，如果点 $A(x_1, y_1)$在给定的抛物线上，那么

$$x_1^2 = 4ay_1,$$

因此，

$$(-x_1)^2 = 4ay_1.$$

因而，与点 A 关于 Oy 轴对称的点 $B(-x_1, y_1)$也在给定的抛物线上。抛物线的对称轴通常称为**抛物线的轴**。

我们考虑方程

$$y = kx + m, \tag{28}$$

这是一个一次方程，所以它表示一条直线。现在我们来求抛物线(27)和直线(28)的交点的横坐标。即我们由方程(27)和(28)中消去 y，由所得的方程即可求出 x。

用式 $kx+m$ 代替方程(27)中的 y，我们得到

$$x^2 = 4a(kx+m)$$

或者

$$x^2 - 4akx - 4am = 0, \tag{29}$$

于是

$$x = 2ka \pm 2\sqrt{k^2a^2 + am}. \tag{30}$$

方程(29)的根可能是两者皆为实的且不相等，或者是虚的，或者皆为实的且相等。在第一种情况我们得到两个交点；第二种情况没有交点；最有趣的是第三种情况，两个交点重合并且直线(28)将是抛物线(27)的一条切线。在这种情况，

$$k^2a^2 + am = 0,$$

因而，

$$m = -k^2a,$$

并且切线的方程取下列形式

$$y = kx - k^2a. \tag{31}$$

切点M的坐标由方程(30)和(27)或者(31)求出，即：

$$x=2ka,\quad y=k^2a。$$

我们将简述关于抛物线切线的一个简单作图法．用N表示由切点M到Oy轴的垂足(图 18)。标出点N关于坐标原点O对称的点N_1，并且画一条直线MN_1。点N_1在直线(31)上，因为它的坐标为$x=0$，$y=-k^2a$，满足方程(31)。所以直线(31)和MN_1有两个公共点，即M和N_1。因此直线MN_1就是所求的切线。

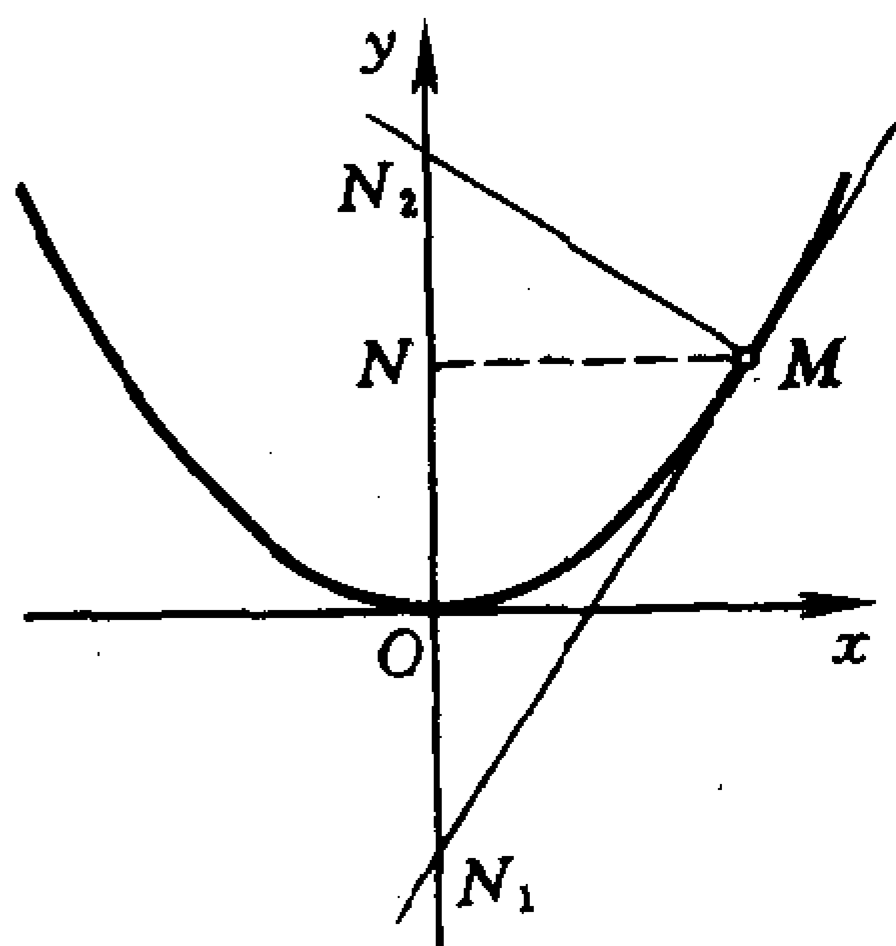


图 18

上述方法对于过原点O画一切线是不适用的。现在我们来证明Ox轴是抛物线在原点O处的切线．联立地解方程

$$x^2=4ay \quad 和 \quad y=0,$$

得到$x_1=x_2=0$，因此，抛物线(27)和Ox轴的两个交点重合于点O。

同样地，我们来考虑绘制抛物线的法线，也即通过切点垂直于切线的线。设N_2为法线MN_2与Oy轴的交点(图 18)。由直角三角形MN_1N_2我们有：

$$NN_1 \cdot NN_2 = MN^2.$$

由于

$$MN = 2ka, \quad NN_1 = 2k^2a,$$

所以

$$NN_2 = 2a.$$

由此即可画出点 N_2，从而我们画出直线 MN_2，它即为要绘制的法线。

现在我们来画平行于 Oy 轴的另一条直线 MM'(图19)。

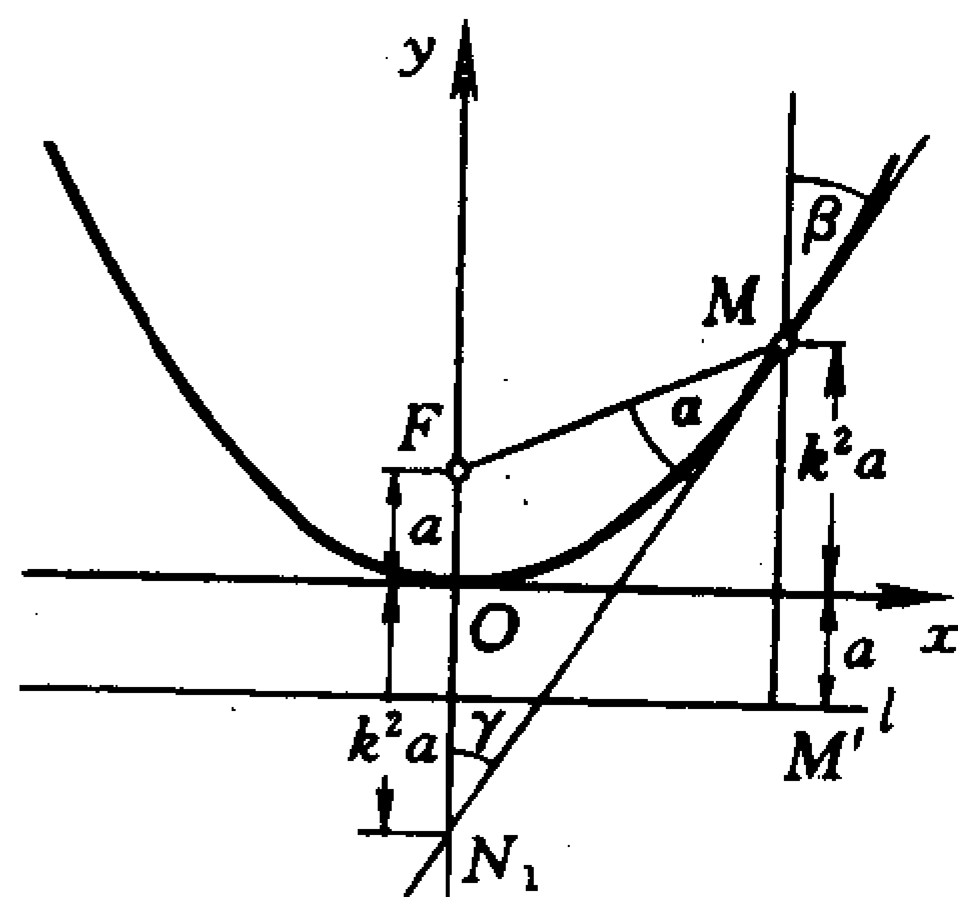


图 19

因为由M到 l 的距离等于 k^2a+a，MF 也等于 k^2a+a。另一方面有

$$N_1F = N_1O + OF = k^2a + a.$$

所以

$$MF = N_1F,$$

即三角形 FMN_1 是等腰三角形。因此(见图19上的记号)，

$$\angle \alpha = \angle \gamma.$$

因为 Oy 轴与直线 MM' 是平行的，所以

$$\angle \gamma = \angle \beta.$$

因而

$$\angle\alpha=\angle\beta. \qquad (32)$$

一个凹镜，设其表面是由一条抛物线绕其轴旋转而成①．由方程(32)可看出，这个凹镜具有以下特征：它使平行于其轴的光线照射在其表面上时，反射后会聚于焦点，反之如果光源位于焦点，则由光源散射的光在镜表面将被反射成为平行于镜轴的光线．因而，由此得出，望远镜和探照灯的镜反射面应该具有旋转抛物面的形状．

§8 极 坐 标

在解析几何中，我们不仅仅采用笛卡儿直角坐标，而且还采用其他的坐标系．其中应用最广泛的是极坐标系，这是由于它极其简单且不同于其它形式的坐标系．在本节中我们将研究这种坐标系．

在选择一个坐标系时，必须要考虑到被研究的图形和需要求解的问题的性质，因为解法的成功与否在相当程度上取决于解题的方法与问题的数据之间的联系．特别，对于许多的问题，是通过使用极坐标得到了简单的解法．

让我们来回忆一下一个点的极坐标的定义．

在平面上取点O(极点)和通过给定点O作半轴Ox（极轴)．在给定的平面上我们取任意点P，然后画线段OP，并将ρ表示此线段的长度，令$\angle xOP=\varphi$（图20)．量ρ和φ称之为点P的极坐标，ρ称为这个点的极半径，φ是它的极角．不仅仅角φ，而且角$\varphi+2k\pi$（k为任意整数）也可以认为是点P的极角②．

① 这样的曲面称为旋转抛物面．

② 本书中选择弧度作为角的度量单位．

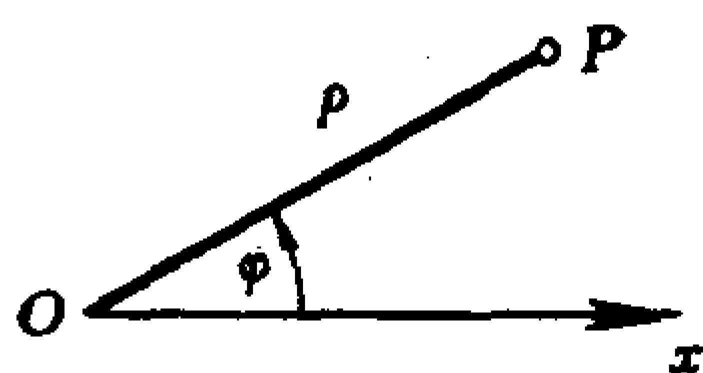


图 20

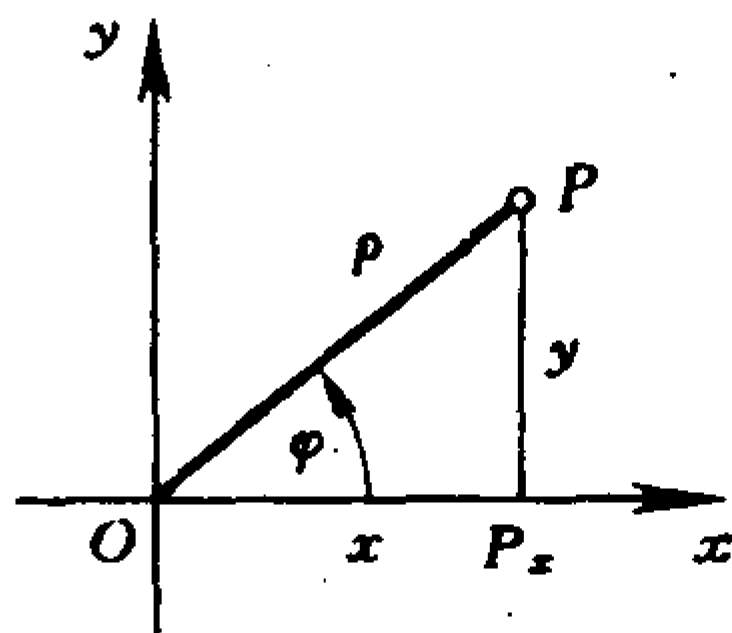


图 21

在所考虑的平面中，我们以笛卡儿直角坐标系的Ox轴的正部分取为极轴；以坐标原点取为极点O，并且作$PP_x \perp Ox$（图21）。如果点P位于第一象限，我们由直角三角形OPP_x得到

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{33}$$

其中x和y是点P的笛卡儿直角坐标。很容易看到，当P点是平面Oxy上的任意一点时公式(33)也是正确的。

由直角三角形OPP_x我们还可得到

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = y/x. \tag{34}$$

公式(33)和(34)表明了一个点的笛卡儿直角坐标与极坐标之间的关系。

我们假定方程

$$f(\varphi, \rho) = 0$$

描述了一个点集的确定的图形，此点集的极坐标皆满足此方程（参看第四节）。

例如，方程

$$\rho = a\varphi, \tag{35}$$

其中a是一个正的常数，此方程定义了一条无限长的曲线，称为阿基米德螺线（图22）。

我们由点O作半轴OL，并用$A_1, A_2, A_3, \cdots$分别表示半轴OL与阿基米德螺线的交点。如果

那么

$$\angle xOL = \theta < 2\pi,$$

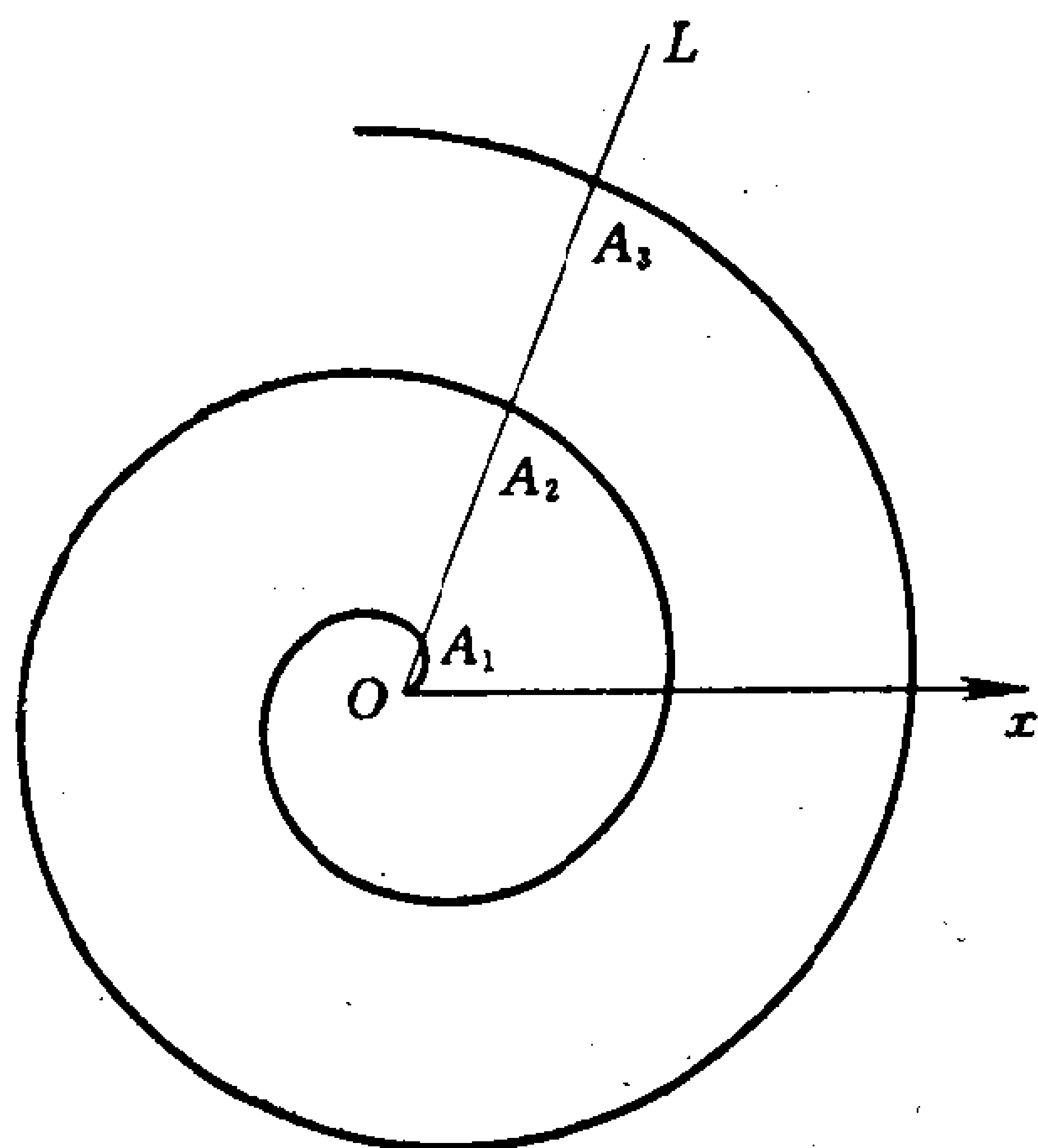


图 22

$$OA_1 = a\theta,$$

$$OA_2 = a(\theta + 2\pi),$$

$$OA_3 = a(\theta + 4\pi),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = 2\pi a.$$

所以，给定直线上相邻交点之间的距离是一与半轴 OL 的方向无关的常量。

由一个用笛卡儿直角坐标描述图形的方程，借助于公式(33)，我们可以得到用极坐标描述同一图形的方程；其逆变换可以由公式(34)得到。

例如，将阿基米德螺线方程写为下列形式：

$$\tan\frac{\rho}{a} = \tan\varphi$$

并且利用公式(34)，我们得到这条曲线以笛卡儿直角坐标表示的方程

$$\tan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}=\frac{y}{x}. \tag{36}$$

比较方程(35)和(36)可看出，采用极坐标研究阿基米德螺线是比较好的。

我们再举一例：给定两个圆 k 和 k'，每一圆的直径皆为 a；用 M 和 M' 分别表示它们的圆心。如果固定圆 k，让圆 k' 绕它作无滑动的滚动，则固定在 k' 上的点 P 画出一被称为心脏线的曲线。在 k' 上的某一位置点 P 与圆 k 的某一确定的点 O 重合；我们将圆 k' 此时相应的位置认为是其初始位置(图23中虚线所示)。

现在我们来求用极坐标表示的心脏线方程。点 O 将直线 MO 分成为两个半轴；我们取不包含 M 点的半轴为极轴，点 O 为极点。

现在我们来考虑圆 k' 除初始位置外的某一位置，并且用 N 表示圆 k 和 k' 之间接触点。因为 k' 绕 k 作无滑动的滚动，有

$$\overset{\frown}{NO}=\overset{\frown}{NP}.$$

因此

$$OP \parallel MM'$$

和

$$\angle PM'M=\angle OMM'=\angle xOP=\varphi.$$

我们作 $OQ \parallel PM'$。显然，$OQ=PM'=a/2$；所以三角形 MOQ 是一个等腰三角形，且

$$MQ=2\frac{1}{2}a\cos\varphi=a\cos\varphi.$$

此外，

$$\rho=OP=MM'-MQ=a-a\cos\varphi.$$

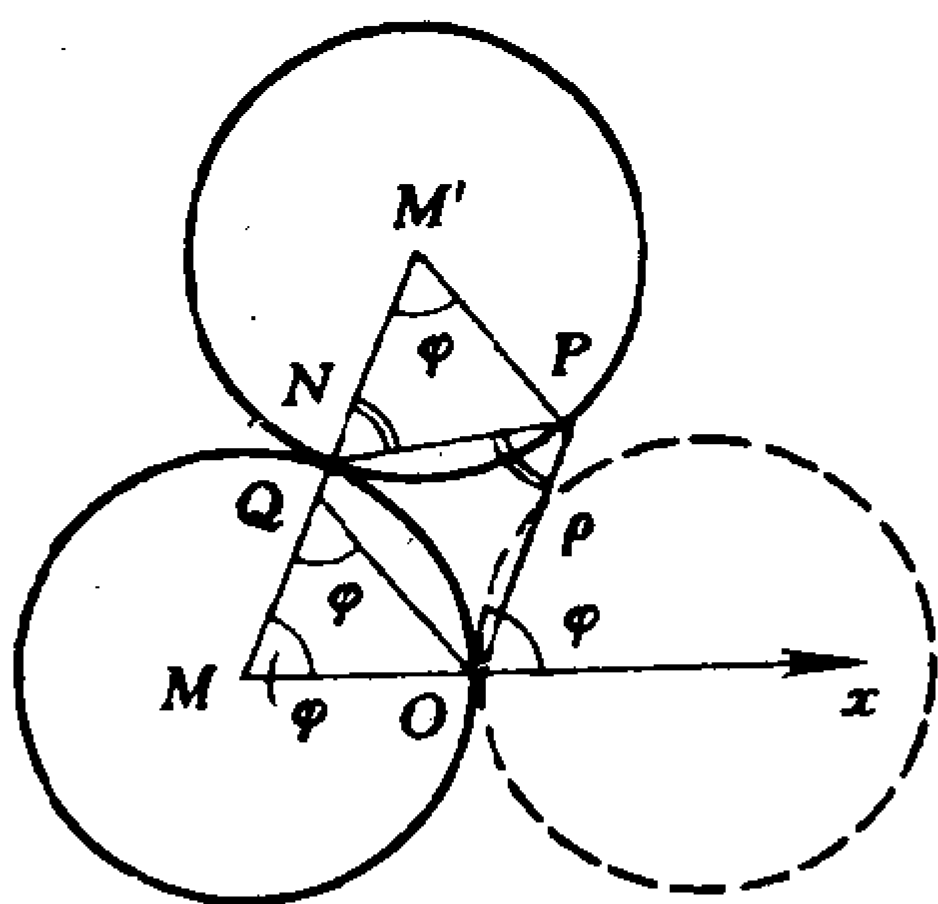


图 23

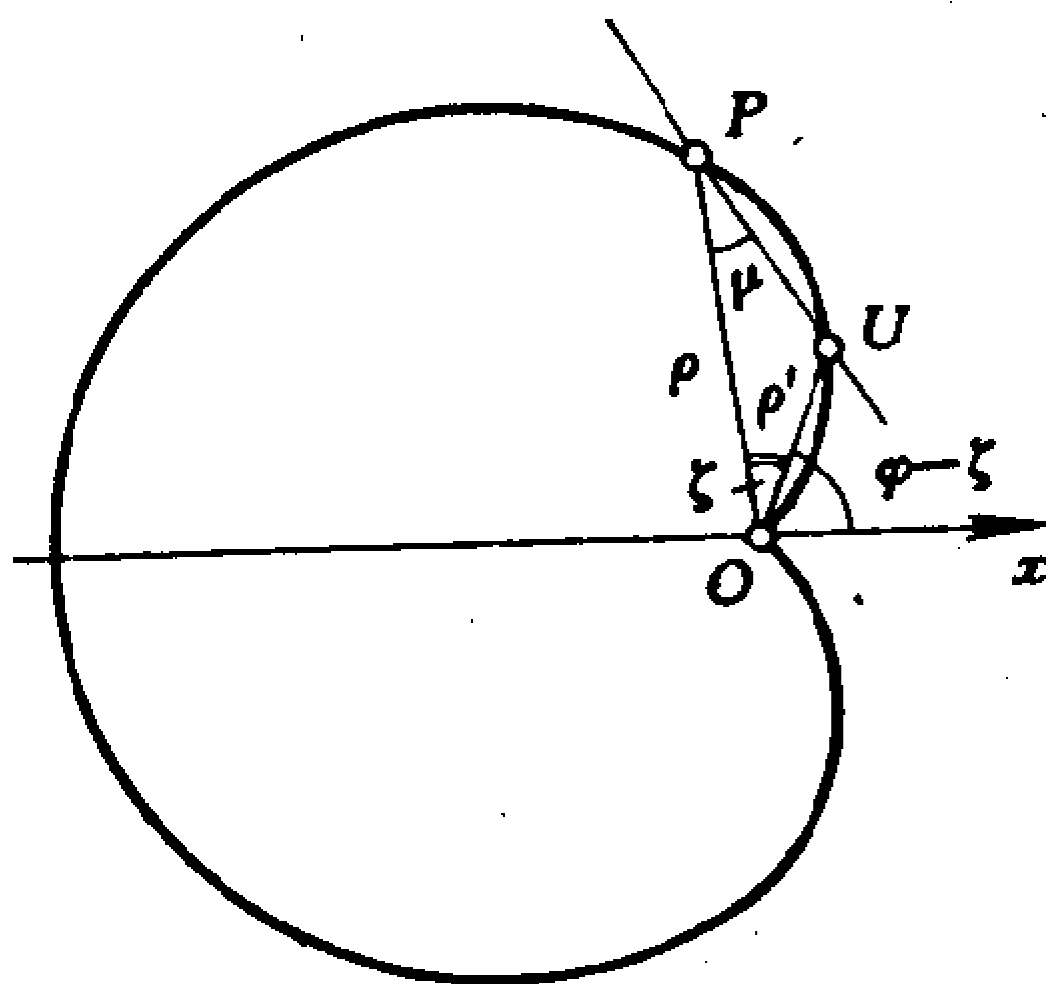


图 24

因此，心脏线方程有下列形式

$$\rho = a(1-\cos\varphi). \tag{37}$$

图24中作出了此曲线。

在心脏线上固定一点 $P(\rho,\varphi)$，并且考虑一沿心脏线移动的动点U（图24）。令

$$OU=\rho', \quad \angle UOP=\zeta, \quad \angle OPU=\mu.$$

显然，

$$\rho' = a[1-\cos(\varphi-\zeta)].$$

如果沿心脏线移动的点U无限接近于点P，那么绕P转动的直线PU趋于某一极限位置；直线PU的这一极限位置是在点P与心脏线相切的切线，并且角μ的极限值是这条切线与极半径OP之间的夹角.

应用正弦定理，由三角形OPU得到

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\sin\mu}{\sin(\mu+\zeta)}$$

或者

$$\frac{1-\cos(\varphi-\zeta)}{1-\cos\varphi} = \frac{\sin\mu}{\sin(\mu+\zeta)}.$$

将最后一个等式的两边同时减去1，得到

$$\frac{\cos\varphi - \cos\varphi\cos\zeta - \sin\varphi\sin\zeta}{1-\cos\varphi}$$

$$= \frac{\sin\mu - \sin\mu\cos\zeta - \cos\mu\sin\zeta}{\sin(\mu+\zeta)}$$

或者

$$\frac{\cos\varphi(1-\cos\zeta) - \sin\varphi\sin\zeta}{1-\cos\varphi}$$

$$= \frac{\sin\mu(1-\cos\zeta) - \cos\mu\sin\zeta}{\sin(\mu+\zeta)}.$$

将 $\sin\zeta$ 除以上式的分子，并且利用

$$\frac{1-\cos\zeta}{\sin\zeta} = \tan\frac{\zeta}{2}\text{①},$$

我们得到

$$\frac{\cos\varphi\tan\frac{\zeta}{2} - \sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{\sin\mu\tan\frac{\zeta}{2} - \cos\mu}{\sin(\mu+\zeta)}.$$

如果动点U无限地接近于点P，那么在极限的情况ζ和$\tan\frac{\zeta}{2}$近似为零，因此上述等式呈下列形式

$$\cot\frac{\varphi}{2} = \cot\mu.$$

由上式我们求出μ的极限值，即

$$\mu = \varphi/2.$$

因此，心脏线的切线与过切点的极半径所构成的角等于此切点的极角的一半。

我们还将证明，通过圆k和k'的切点N的直线PN是心脏线在P点的法线(图23)。实际上，

① 原书为 $\frac{1-\cos\zeta}{\sin\zeta} = \frac{\tan\zeta}{2}$。——译者注

$$\angle OPN=\angle PNM'=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}.$$

因此，点P的切线与直线PN构成的角等于

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

§9　用方程定义图形的举例

在这节中所给出的例子将帮助读者对用方程确定几何图形的方法有一个清晰的概念。同时，它们还将表明，十分复杂的图形也可能用相对简单的方程描述。

例1　考虑方程

$$\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}=2. \tag{38}$$

显然，

$$\frac{|a|}{a}=1^{①}，\quad 如果\ a>0,$$

$$\frac{|a|}{a}=-1，\quad 如果\ a<0.$$

因此，设x,y是某一点P的坐标，式

$$\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y},$$

如果点P位于第一象限式等于2；如果点P位于第二或第四象限式等于零；如果点P位于第三象限式等于-2。最后，如果点P位于其中某一坐标轴上或者与坐标原点重合，则此式无意义。

因而，方程(38)描述了平面的一部分，也就是说，它是

① 量a的绝对值用$|a|$表示。

平面Oxy的第一象限；而且，平面的这个部分不包括位于Ox

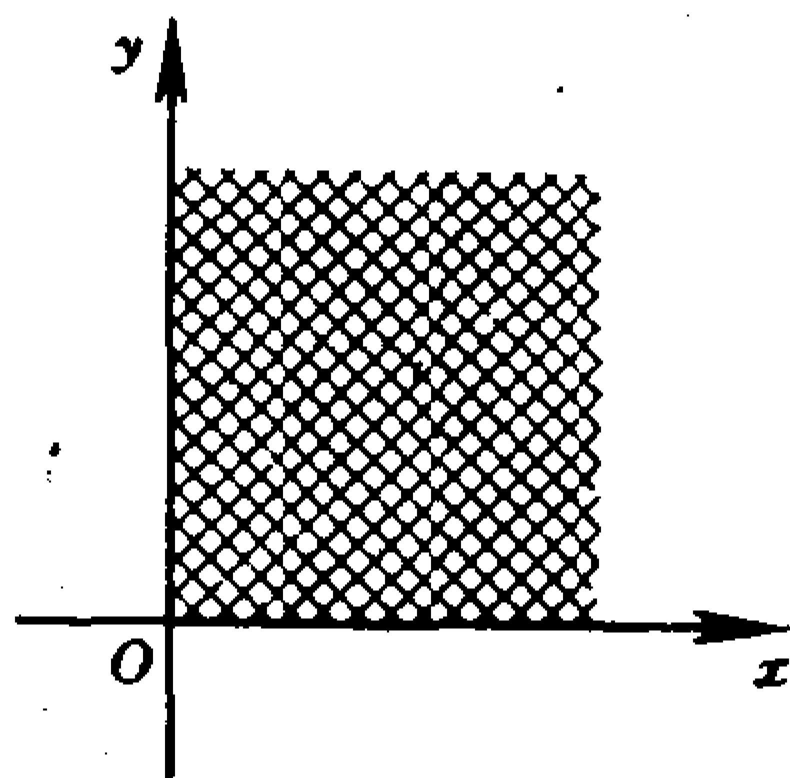


图 25

轴或者Oy轴上的任何一点(图25)。

例 2 考察方程

$$\left\{x-\frac{|x|}{x}\right\}^2+\left\{y-\frac{|y|}{y}\right\}^2=4. \qquad (39)$$

在平面Oxy的四个象限中我们应该对它分别进行研究；并且可以写成较简单的形式：

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4, \quad \text{在第一象限}, \qquad (40)$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2=4, \quad \text{在第二象限}, \qquad (41)$$

$$(x+1)^2+(y+1)^2=4, \quad \text{在第三象限}, \qquad (42)$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4, \quad \text{在第四象限}. \qquad (43)$$

在形式上方程(40)与一个半径为2，圆心为$K(1,1)$的圆的方程无区别，但是它仅仅描述了位于第一象限的那一部分圆弧。由于，在其他象限我们已得到与(40)稍微不同的方程，因此第一象限的弧与分别位于第二、三和四象限的圆弧(41)，(42)(43)构成了由方程(39)表示的图形（图26)。

图形(39)不包含Ox轴和Oy轴上的点，因为，如果$y=0$，则式$\frac{|y|}{y}$是无意义的；同时，如果$x=0$，则式$\frac{|x|}{x}$也是无意义的。

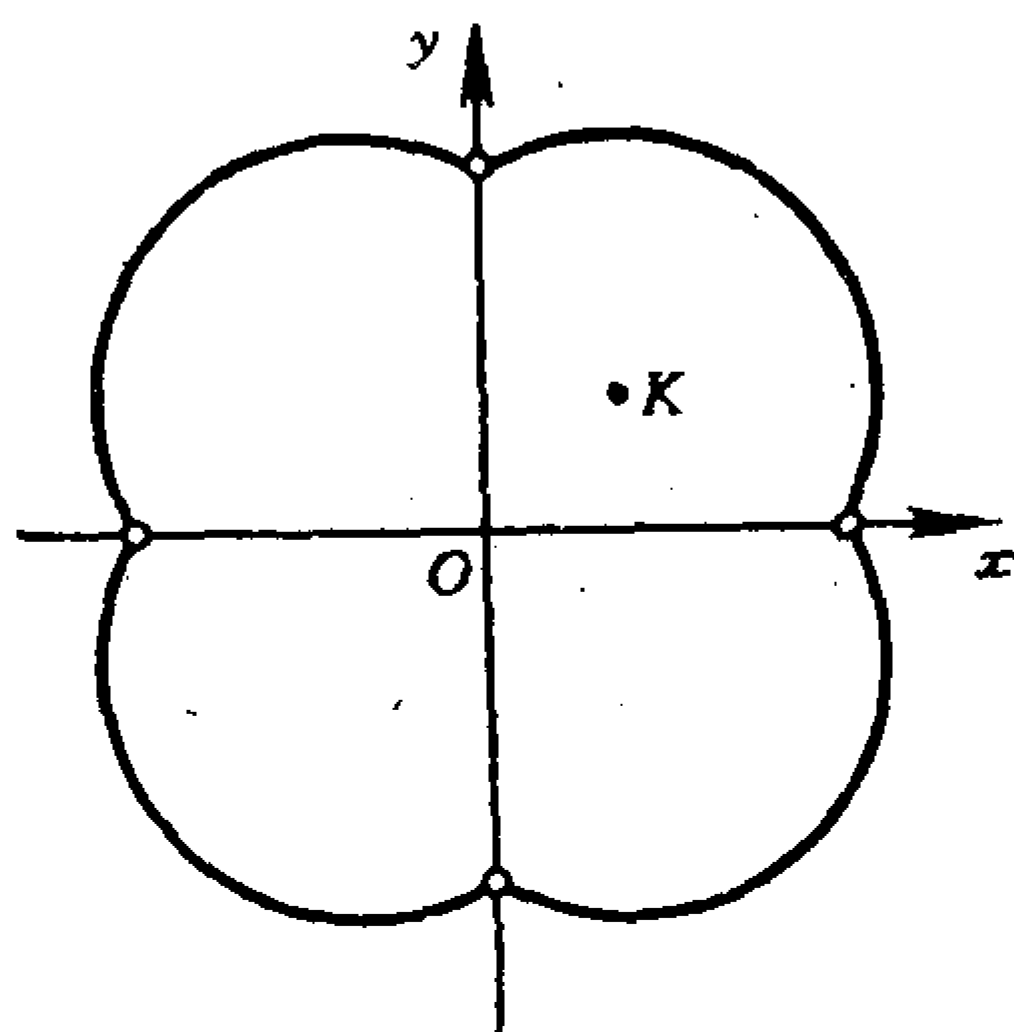


图 26

例 3 方程

$$|x| + |y| = 2, \tag{44}$$

在平面 Oxy 的四个象限中我们应该对它分别地进行研究。它可以写为形如

$$x + y = 2, \quad 在第一象限,$$
$$-x + y = 2, \quad 在第二象限,$$
$$-x - y = 2, \quad 在第三象限,$$
$$x - y = 2, \quad 在第四象限,$$

这是因为，如果 $a \geqslant 0$，则 $|a| = a$；如果 $a \leqslant 0$，则 $|a| = -a$。容易看到，方程(44)描述了正方形 $ABCD$ 并且包含它的顶点（图27）。

例 4 方程

$$y = |y| \sin x, \tag{45}$$

这要分下列几种情况来考虑：

（1）如果 $y = 0$，此时变量 x 可以取任意值；

（2）如果 y 是任意正数，此时 $\sin x = 1$，因此

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

其中 k 是任意整数；

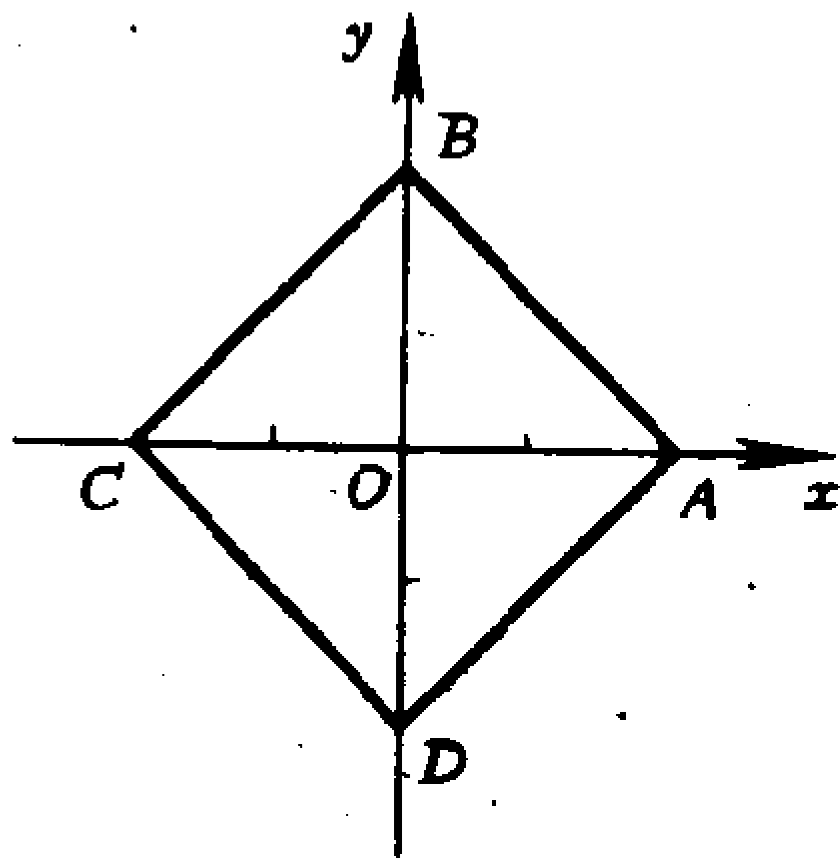


图 27

(3) 如果 y 是任意负数，此时 $\sin x=-1$，因此

$$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

其中 k 是任意整数.

所以，图形(45)是由 Ox 轴和两类无限多的半轴构成；第一类半轴由 Ox 轴上的点开始，这些点的横坐标为

$$\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}\pm 2\pi,\quad \frac{\pi}{2}\pm 4\pi,\quad \cdots,$$

并且这些半轴垂直于 Ox 轴且在它的上方；第二类半轴是由 Ox 轴上横坐标为

$$-\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}\pm 2\pi,\quad -\frac{\pi}{2}\pm 4\pi,\quad \cdots$$

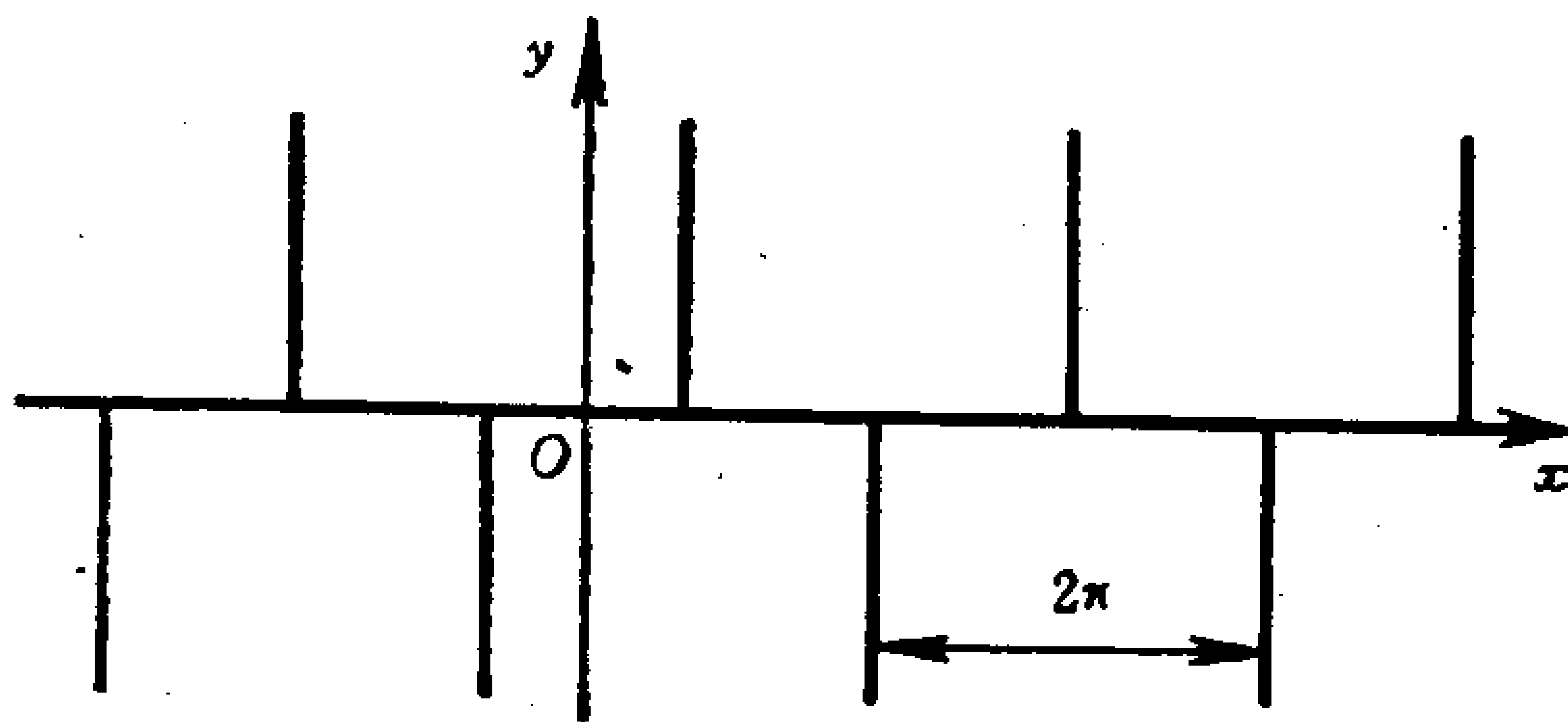


图 28

的点为起点，它们垂直于 Ox 轴且在它的下方（图28）。

例 5　方程

$$\sin(\rho\pi)=0$$

等价于下列无限多个方程：

$$\rho=0,\quad \rho=\pm 1,\quad \rho=\pm 2,\quad \rho=\pm 3,\ \cdots,$$

这些方程描述了由一个极点和半径为 1,2,3,… 构成的一些同心圆，极点是这些同心圆的圆心（图29）。因为已定义 $\rho\geqslant 0$，所以 ρ 的负值不予考虑。

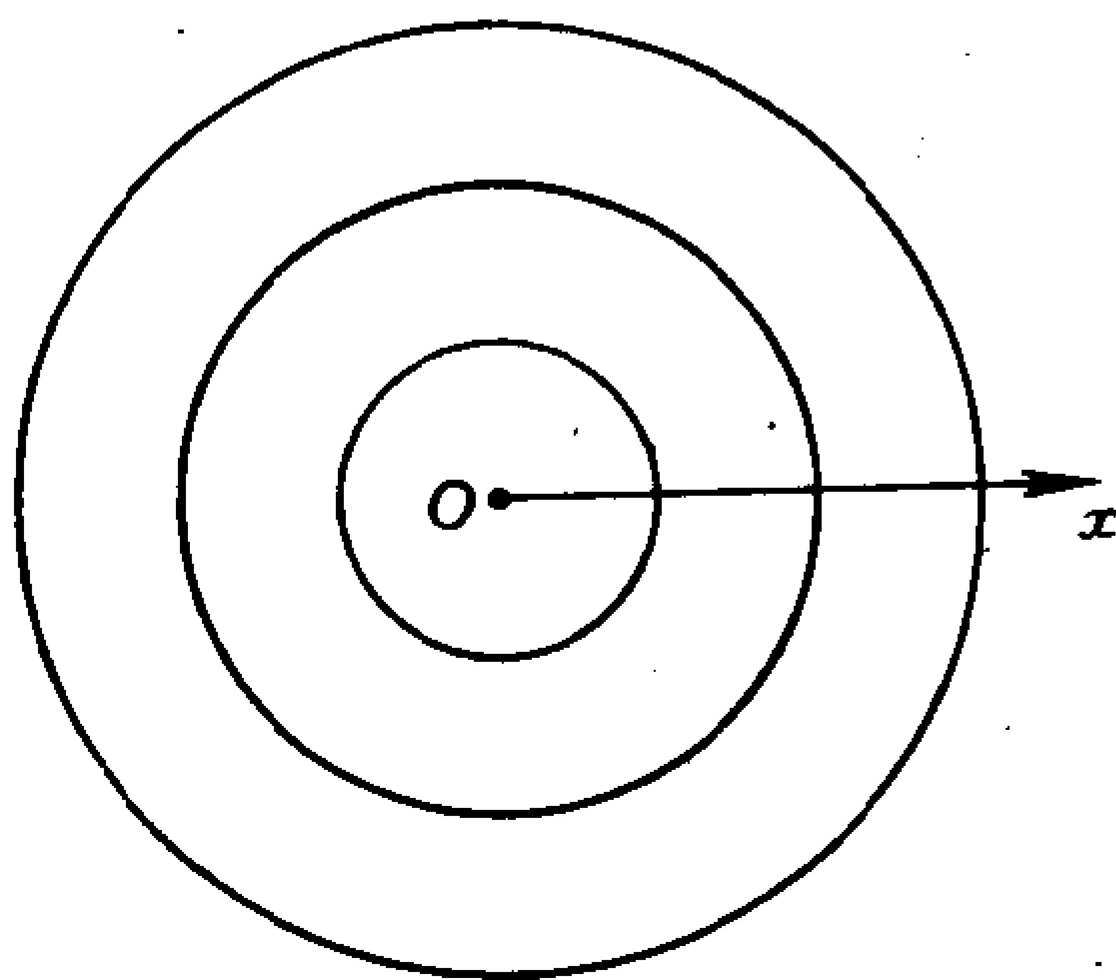


图　29

例 6　我们用符号 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数。例如，

$$[2]=2,\quad [5.99]=5,\quad [-5.99]=-6,$$

$$[\pi]=3,\quad [\sqrt{50}]=7,\quad [-4]=-4,\quad [-4.7]=-5.$$

现在我们来考虑方程

$$y=[x]. \tag{46}$$

如果 $n\leqslant x<n+1$，其中 n 是一整数，那么 $y=n$。因此，方程(46)描述了这样的一个图形，此图形是由一无限多的，排列得像阶梯状的台阶一样的线段构成的（图30）。

上述线段中的某一段位于 Ox 轴上。此线段的左端点的

横坐标等于零。现在我们来证明此线段不存在右端点。

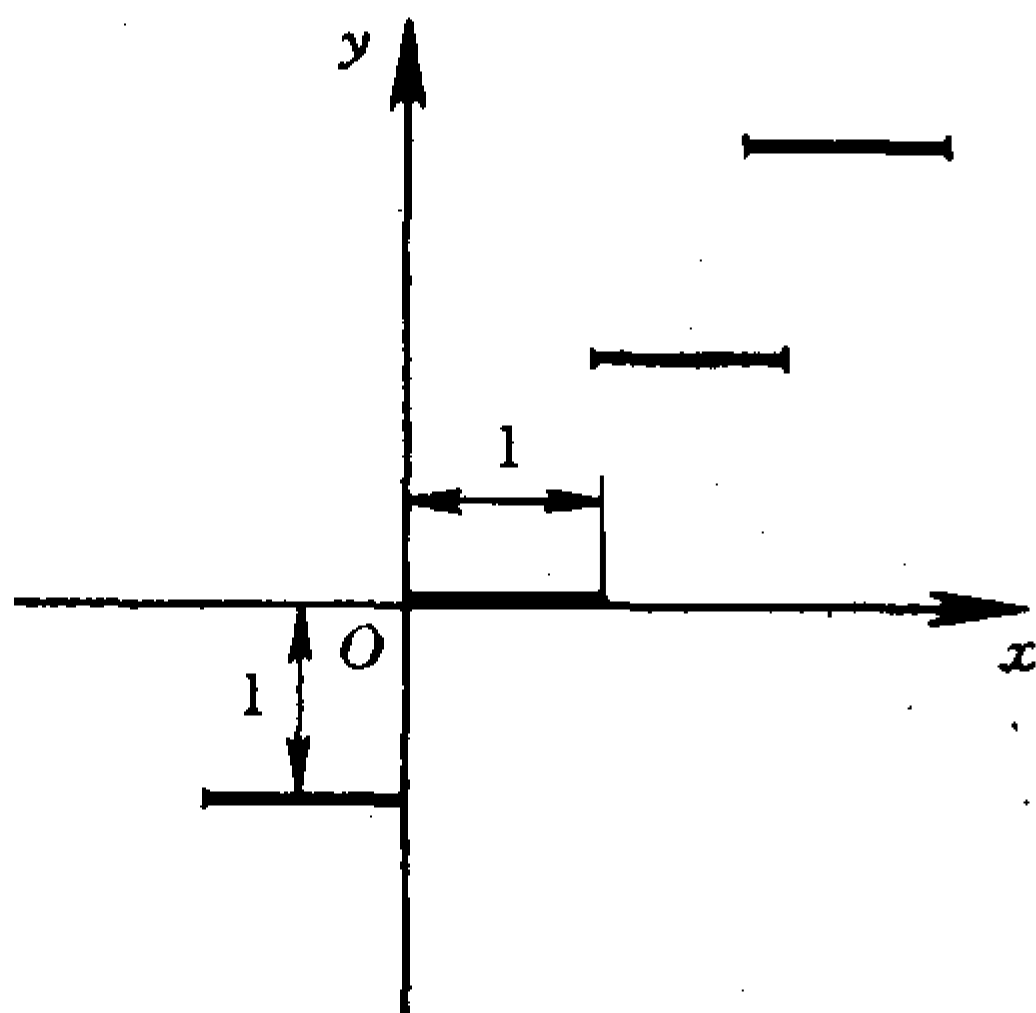


图 30

假设在此线段上存在这样的一个点P，其横坐标等于p。因此，$[p]=0$。显然，$p\neq 0$，$0<p<1$。取

$$q=p+\frac{1-p}{2}=\frac{1}{2}+\frac{p}{2},$$

用Q表示该图形中横坐标为q的点。显然，$p<q<1$，且$[q]=0$。所以，点Q与点P属于图形(46)的同一线段上且位于点P的右边，这与我们的假设矛盾。

类似地，我们可以证明图形(46)中的任一线段都有左端点，但都没有右端点。

例7 由方程

$$[x]=[y]$$

描述的图形是由无限多个正方形与它们内部的点构成的，但是不包含这些正方形的上方的边和右侧边。取这些正方形的每一个的边长等于一个单位长，它们的位置如图31所示。

实际上，如果x和y是满足不等式

$$n\leqslant x<n+1,\qquad n\leqslant y<n+1$$

的任意的数，其中n是一个整数，则

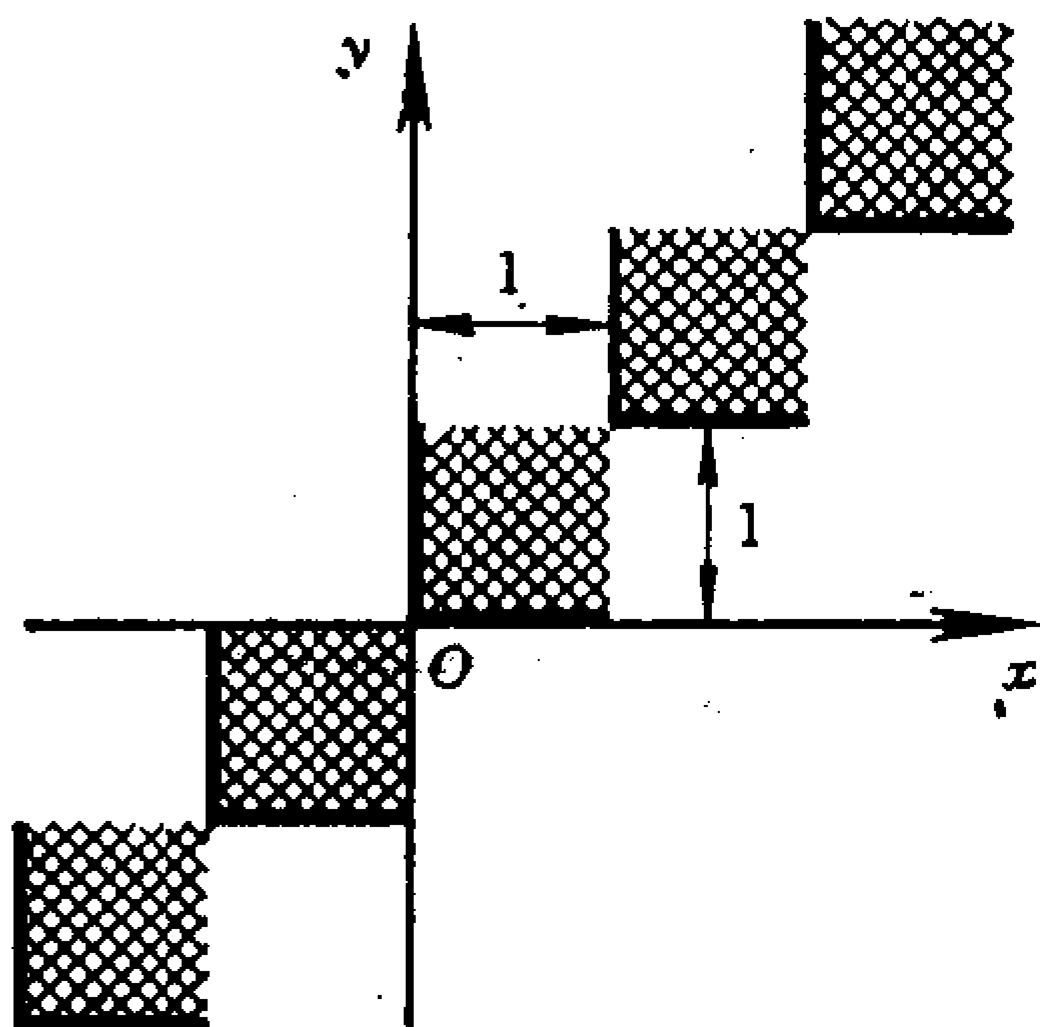


图 31

$$[x]=[y]=n.$$

例 8 在上面我们已经看到，如果不在整个平面Oxy而是仅仅在它的某一象限上考虑，则方程(39)和(44)是可以被简化的。在考虑方程

$$\left\{x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right\}^2+\left\{y-\left[y+\frac{1}{2}\right]\right\}^2=\frac{1}{16} \qquad (47)$$

时我们将同样应用把一个平面分割为几个部分的方法。

我们用直线

$$x=\pm\frac{1}{2},\quad x=\pm\frac{3}{2},\quad x=\pm\frac{5}{2},\quad \cdots, \qquad (48)$$

$$y=\pm\frac{1}{2},\quad y=\pm\frac{3}{2},\quad y=\pm\frac{5}{2},\quad \cdots, \qquad (49)$$

把平面Oxy分割为一些正方形，考虑其中的某一个，例如，由直线

$$x=\frac{3}{2},\quad x=\frac{5}{2},\quad y=\frac{1}{2},\quad y=\frac{3}{2}$$

所围成的正方形Q。在此正方形Q内任意一点的坐标满足不等式

$$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}, \quad \frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}$$

或者

$$2<x+\frac{1}{2}<3, \quad 1<y+\frac{1}{2}<2.$$

因此，在正方形Q内，也就是假如只考虑变量 x 和 y 的这样的值，这些值是在正方形Q内点的坐标，则方程(47)可取下列形式

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{1}{16}. \tag{50}$$

方程(50)描述了一个半径为1/4，圆心为点 $M(2,1)$ 的圆，且此圆心也是正方形Q的中心。圆(50)完全地位于正方形Q内，所以它的任意一点的坐标皆满足方程(47)。

根据上述想法，我们可以得到这样的结论：图形(47)是由无限多个圆构成，其每一个圆的半径皆为1/4，且每一个具有整数坐标的点皆是这些圆中某一个圆的圆心（图32)。

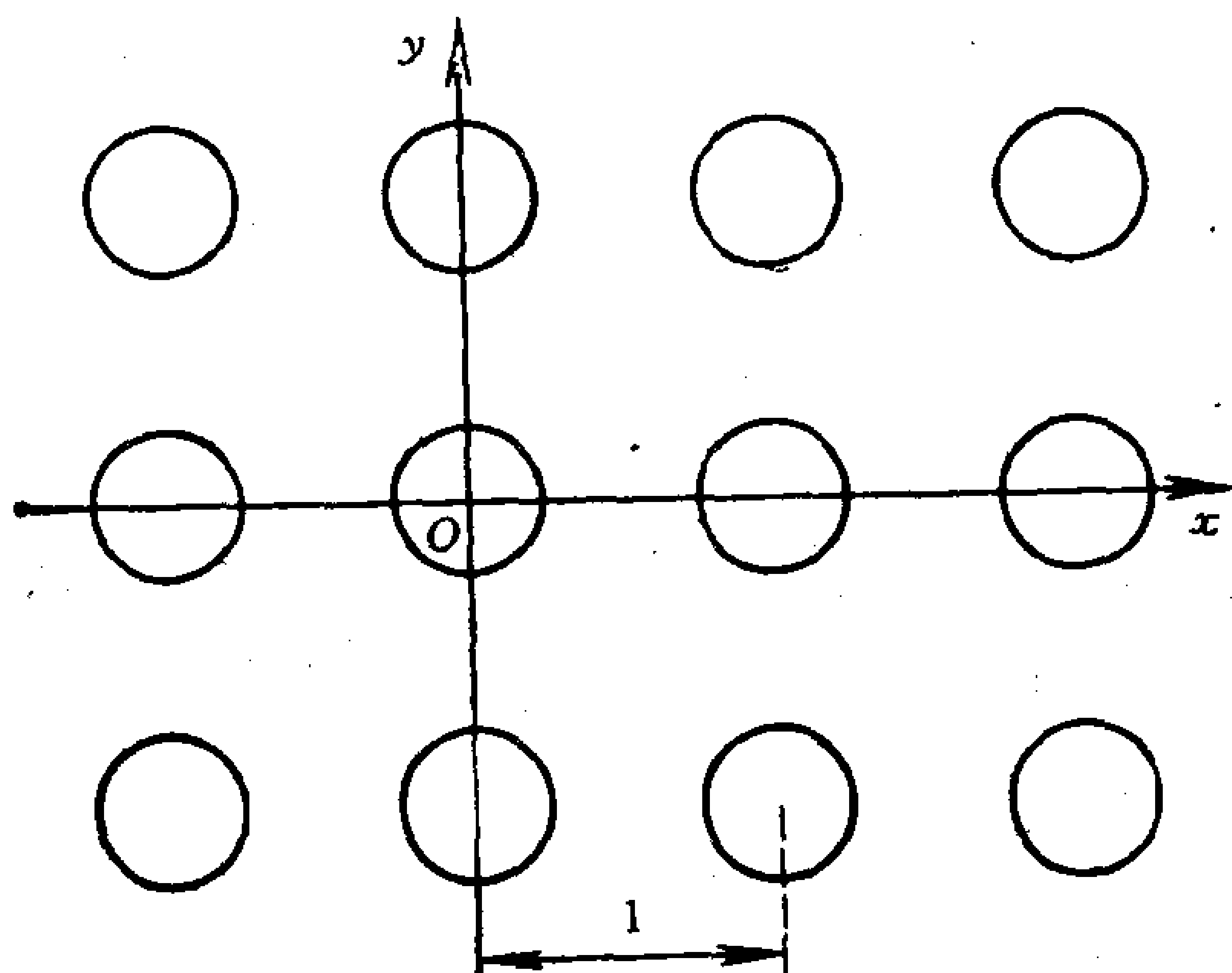


图 32

例 9 方程

$$\left\{x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right\}^2+\left\{y-\left[y+\frac{1}{2}\right]\right\}^2=\frac{5}{16} \qquad (51)$$

仅是等号右边的数与方程(47)不同．因此，在上例的正方形 Q 内方程(51)可取下列形式：

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{5}{16}.$$

因而，此方程描述了一个半径为$\sqrt{5}/4$，圆心为在 Q 内的点 $M(2,1)$ 的圆．因为$\sqrt{5}/4>1/2$，所以，只有位于正方形 Q

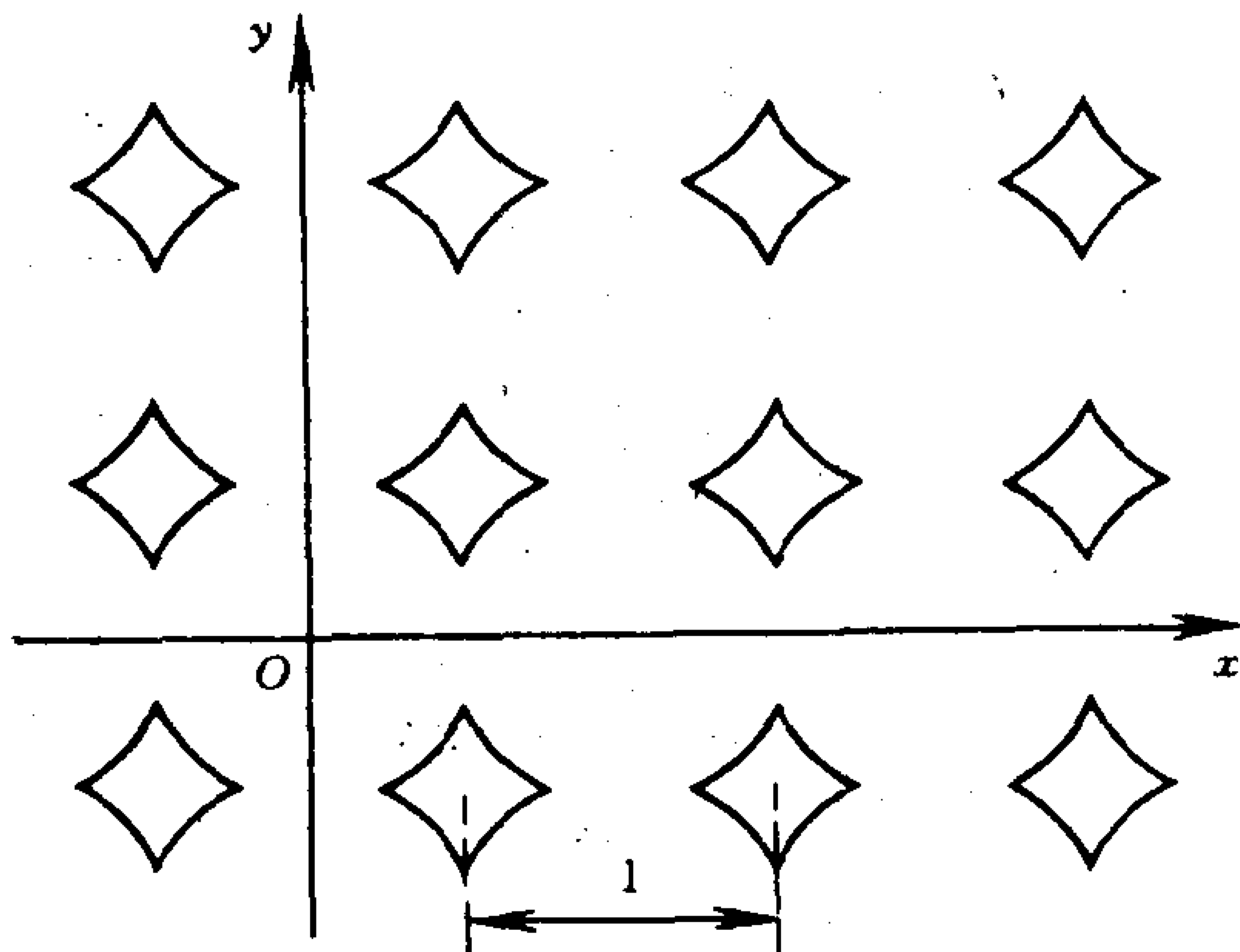


图 33

内的圆的那部分才同时也是图形(51)中的一部分，而位于 Q 外的那些点不属于图形(51)．我们建议读者自己验证：这个圆与正方形 Q 的边的交点也属于图形(51)．

类似地，我们可以考虑其它的正方形，这些正方形是用直线(48)和(49)分割平面 Oxy 而得到的．

图形(51)如图33所示．

作为一个已经仔细地研究了上述各例的读者，不难画出用下列方程描述的图形：

(1) $y=|x|$；

(2) $\sin^2(\pi x)+\sin^2(\pi y)=0$；

(3) $\sin(x+y)=0$；

(4) $(x+|x|)^2+(y+|y|)^2=4$；

(5) $\left\{x-2\frac{|x|}{x}\right\}^2+\left\{y-2\frac{|y|}{y}\right\}^2=5$；

(6) $\left\{x-\frac{|x|}{x}\right\}^2+\left\{y+\frac{|y|}{y}\right\}^2=4$；

(7) $\left\{x-\frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}\right\}^2+\left\{y-\frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}\right\}^2=4$。

结 束 语

在科学研究中系统地应用坐标法的想法有可能要追溯到几千年前。例如，众所周知，古代的天文学家曾使用一个在假想的天体上特殊的坐标系去测定最亮的星体的位置，绘制星图，并且非常精确地观测到太阳、月亮和行星相对于那些不动的星体的运动。

后来，地面坐标系被广泛地应用于绘制地球表面的地图，用以确定航船在深海中的位置。

但是，直到17世纪，坐标法仅有有限的实际应用。事实上，它只被用来标出一些特殊对象——不动的（如山、海角等）或者动的（如船、行星等）——的位置。

在1637年出版的，由著名的法国哲学家和数学家R.笛卡儿所著的《几何学》一书中，坐标法得到了新的并富有成

果的应用。

笛卡儿解释了变量这一概念的含义。在研究最常用的曲线时，笛卡儿观察到，一个沿着给定曲线运动的点的坐标与完全描述该曲线的特定方程有关。因而建立了通过点的坐标的方程来研究曲线的方法，这既标志了解析几何的开创，同时也促进了其它数学学科的发展。

“数学中的转折点——F.恩格斯写道——是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生。”①

解析几何的数学基础在于其独特的确定几何图形的方法：一个图形由一个方程给定。

考虑与某一确定的方程相联系的一个点，其坐标变量是x和y，我们看到，此点随着它的坐标的变化在平面内运动。但是，它的运动轨迹并不是任意的，因为给定的方程决定了在变量x和y之间的依赖关系。换句话说，方程起着一种轨道的作用，它引导一个点沿着一个给定的路径运动。例如，曲线

$$y = x^3 \tag{52}$$

上的点$P(1,1)$可以移动到$P'\left(\frac{3}{2},3\frac{3}{8}\right)$或$P''(2,8)$的位置，但是方程(52)不允许点$P$移动到$Q(2,7)$的位置。

但是，有必要将图形用方程来描述这一概念和动点的概念区分开来。后者，例如像曳光弹在空中留下一道光迹描绘出一个图形，或者像地震仪的笔那样记录出反映地壳振动的曲线。一个方程可以看作是选择由这个方程所定义的图形上

① 恩格斯著，中共中央马恩列斯著作编译局译，自然辩证法，人民出版社，1971，第236页。

的点的工具：仅仅挑选平面上坐标满足给定方程的那些点。

上述第一个概念的存在应归功于笛卡儿，而且它与函数相关性的概念紧密相连：可以把由一个方程定义的曲线看作是函数的图形，而且自变量和因变量的变化依赖于描述这个函数图形的点的移动。

第二个概念在想法上比较简单且易于理解。同时，它适用于更广范围的图形①。第四节以及第五至九节的部分内容是关于它们的特性的研究。用不等式描述图形比较接近于这个概念，关于这一点，我们举一个例子顺便提一下：坐标满足不等式$x^2+y^2\leqslant 25$的点属于具有半径为5，圆心在坐标原点的圆，这些点限制在圆内并包含圆周本身。

（邱淑清译，朱学贤校）

① 实际上，只有在对函数相关性的概念作出充分推广后，才能认为在第九节中的例1，4，7是某些函数的图形。

编者按 本文是根据作者在国立莫斯科大学设立的数学奥林匹克学校给高中学生作的演讲整理而成的。在考虑到读者知识水平的前提下，作者对代数方程一般理论的结论及方法进行了阐述。书中没有证明，因为否则会把几乎半本大学高等代数教科书抄过来。即使这样，也不要以为这本书一读就懂。通过琢磨所有的定义及叙述，检查所有例题的演算及所有例子中的方法的应用等，可以使此文作为知识高度浓缩的通俗数学读物。

任意次代数方程[①]

A.G. Kurosh

引　言

中学代数课程的内容很广泛，但方程是一个中心课题。我们只讨论一元方程，并先回顾一下中学里所学过的内容。

每一个学生都会解一次方程：给定方程

$$ax+b=0,$$

其中 $a\neq 0$，则它的根是

① 本文根据 Mir Publishers Moscow 出版的《Little Mathematics Library》中的小册子《Algerbraic Equations of Arbitrary Degrees》（Translated from the Russian by V.Kisin, 1977）英文版译出。

$$x = -\frac{b}{a}.$$

进而，学生学到了二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

（其中 $a \neq 0$）的求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

如果这个方程的系数是实数且根号内的数是正数，即 $b^2 - 4ac > 0$，则这一公式给出方程的两个不相等的实根。但如果 $b^2 - 4ac = 0$，则方程只有1个根，这个根被称为重根。当 $b^2 - 4ac < 0$ 时方程没有实根。

最后，学生学会了解某些类型的三次方程及四次方程，这些方程的解很容易归结到解二次方程。例如，三次方程

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

有一个根 $x = 0$，分解出因式 x 之后，变成二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

四次方程

$$ay^4 + by^2 + c = 0$$

被称为双二次方程，令 $y^2 = x$ 后它也化为二次方程，求出所得二次方程的根然后开平方，可得原方程的根。

我们再强调一遍，这只是一些非常特殊类型的三次及四次方程。中学代数并不教授解三次、四次及更高次数的任意方程的方法。但是，在工程、力学及物理等许多不同的分支中，会遇到较高次的代数方程。任意 n 次（n 是正整数）代数方程的理论经过几个世纪的发展，现已成为在大学及师范

学院里讲授的高等代数的一个重要组成部分。

§1 复　数

代数方程理论本质上立足在高中所讲的复数理论之上。学生常常怀疑引进复数的合理性并怀疑它们是否存在。事实上，当复数一开始被引进时，甚至连数学家们也怀疑它们的实际存在性，因而“虚数”这一名词沿用至今。但是，现代科学视复数如常物，它们一点也不比有理数或无理数更“玄虚”。

之所以引进复数，是因为人们不可能在实数范围里求负数的平方根。那样的话，有些二次方程将没有根，例如方程

$$x^2+1=0$$

就是这类方程中最简单的一个。是否有一种方法去扩展数的王国使它们也有根呢？

在学校里学习数学的过程中，学生们发现，他们所掌握的数系是不断扩大的。在初等算术中，开始是正整数，而后马上出现了分数。在代数课中又增加了负数，从而有了有理数系。最后，引进了无理数，导致了实数系。

数的内涵的每一次这种不断的扩充，使有可能求得一些先前没有根的方程的根。例如，引进分数之后，方程

$$2x-1=0$$

就有根了；又如，在引进负数之后，方程

$$x+1=0$$

也有了根；而且，只有在引进无理数之后，方程

$$x^2-2=0$$

才有根。

所有这些充分说明了在扩大数的宝库的道路上还需更上一层楼。下面，我们大致描述一下这最后的一步。

大家知道，如果在一条给定的直线上固定正向，标出原点O并选取单位长度（图1），则这条直线上的每一个点A都

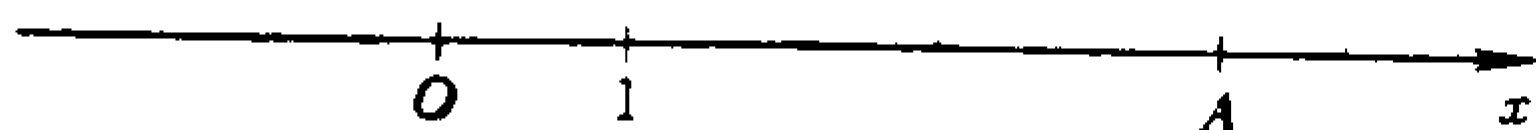


图 1

对应有一个坐标，即对应一个实数；如果A点位于O点的右方，则它依取定的单位长度表示A点和O点之间的距离；如果A点在O点的左面，则它依取定的单位长度是A点到O点的距离的相反数。因此，直线上的每一个点都分别对应一个不同的实数，可以证明，在这个过程中，所有的实数都被用到。由此可以认为直线上的点是其相应的实数的像，也就是说，这些数沿直线排成一行。我们称这条直线为**数轴**。

那么，有没有可能按某种方式去扩充数，使新的数可以顺理成章地用平面上的点来表示呢？到此为止，我们还没有构造出比实数系更大的数系。

首先要指出，用什么样的“材料”才能使新的数系被“构造”出来，即什么“对象”能扮演新数的角色。然后还必须定义对这些“对象”(即新数）如何进行代数运算——加法及乘法、减法及除法。因为想构造的是能用平面上所有的点表示的数，所以最简单的方法是考虑平面上的点本身就是新数。假定这样做的话，我们只需定义如何对它们作代数运算，也就是说，给定平面上的两个点，它们的和是哪个点？它们的积呢？……？

直线上的点的位置由一个实数（即它的坐标）完全确定，因此，平面上任意一点的位置可以用一对实数来确定。为此，我们在平面上作两条互相垂直并相交于O点的直线，而且在每一条直线上取定正向并选定单位长度（图2）。我们称这两

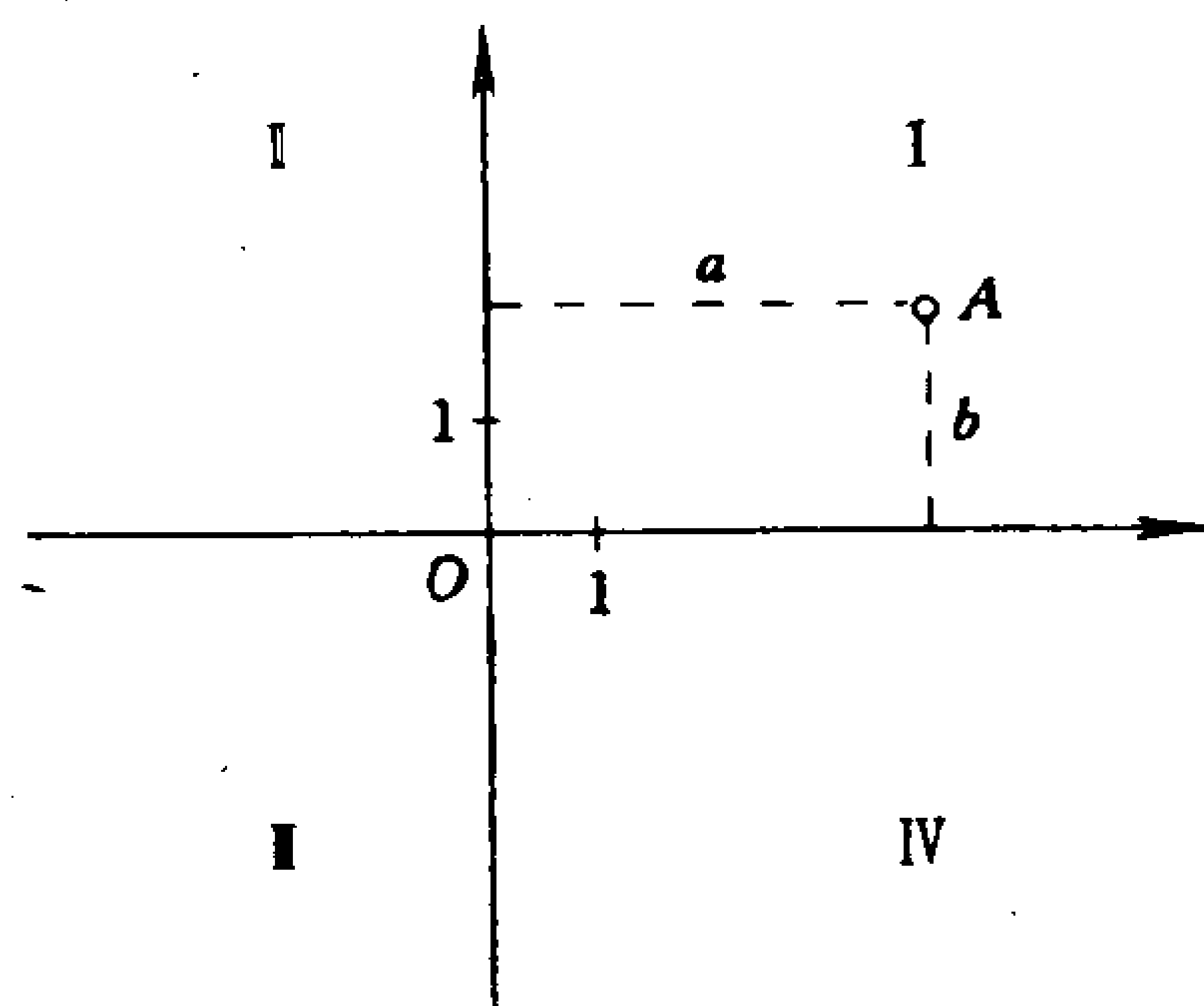


图 2

条直线为坐标轴，水平方向的称为横轴，竖直方向的称为纵轴。它们将整个平面分成4个象限，象限数在图2中标出。

第Ⅰ象限中的每个点A（见图2）可以由两个正实数完全确定，例如，数a依取定的单位长度表示该点离开纵轴的距离（点A的横坐标），数b依取定的单位长度表示该点离开横轴的距离（点A的纵坐标）。反过来，对于每一对正实数(a,b)，我们可以在第Ⅰ象限中找到一个完全确定的点，使得它的横坐标是a，纵坐标是b。其他象限中的点也用同样的方式确定。但是，为了保证平面上所有的点及坐标对(a,b)之间是一一对应的，即避免发生使同一个坐标对(a,b)对应平面上几个不同点的现象，我们假定在第Ⅱ、Ⅲ象限中的点的横坐标是负的，而在第Ⅲ、Ⅳ象限中的点的纵坐标是负的。可以看到，横轴上的点的坐标形式是$(a,0)$，纵轴上的点的坐标形式是$(0,b)$，其中a和b是实数。

现在，可以用一对实数来确定平面上的一个点了。它使我们用不着再说由坐标(a,b)确定的点A，而直接说点(a,b)就行了。

下面再定义平面上点的加法和乘法。乍一看，这些定义完全是人为的，但是，只有这种定义才有可能去实现计算负数的平方根的目标。

设(a,b)及(c,d)是平面上的两个已知点。现在，我们还不知道如何去定义这两个点的和及积。姑且称它们的和是横坐标为$a+c$，纵坐标是$b+d$的点，即

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d).$$

并称它们的积是横坐标为$ac-bd$，纵坐标是$ad+bc$的点，即

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

容易证明，以上定义的平面上的点的运算具有数的运算的所有大家熟知的性质：平面上点的加法及乘法是可交换的（即加数、乘数都可以互相交换位置），可结合的（即3个点的和及积与括号的位置无关）及可分配的（即括号可以移去）。注意：点的加法及乘法的结合律使有可能准确地引进平面上任意有限个点的和及积的运算。

现在，我们可以定义平面上点的减法和除法了，它们分别是加法及乘法的逆运算(是按这样的意义：在任意数系中，两个数的差定义为一个数，它与减数相加等于被减数；两个数的商定义为一个数，它与乘数的积等于被乘数)，即

$$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d),$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

很容易证明上面的最后一个等式右边的点与点(c,d)的乘积（见前面的定义）恰好是点(a,b)。第一个等式右边的点与

点(c,d)的和是(a,b)这一事实更容易验证。

应用所定义的运算于横轴上的点（它们具有形式$(a,0)$）得

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),$$
$$(a,0)(b,0)=(ab,0).$$

即，这种点的相加及相乘归结为它们的横坐标相加及相乘。这一特点对于减法和除法依然成立，即

$$(a,0)-(b,0)=(a-b,0),$$
$$\frac{(a,0)}{(b,0)}=\left(\frac{a}{b},0\right).$$

如果设想横轴上的每一个点$(a,0)$表示它的横坐标即实数a，或者换一种说法，说点$(a,0)$就是数a，则横轴就简化为一条数轴。于是我们现在就可以这样说，由平面上的点所构成的数系，包含了所有的实数，它们只是横轴上的点。

但是，不可能将纵轴上的点与实数等同起来。考虑点$(0,1)$，它位于点O上方1个单位长度的地方，我们用字母i表示之：

$$\mathrm{i}=(0,1)$$

并依平面上点的乘法的定义计算它的平方得

$$\begin{aligned}\mathrm{i}^2&=(0,1)(0,1)\\&=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)\\&=(-1,0).\end{aligned}$$

然而，点$(-1,0)$并不在纵轴上，而是在横轴上，因而表示实数-1，即

$$\mathrm{i}^2=-1.$$

于是，我们在新的数系中找到了一个数，它的平方等于实数-1，即现在可以计算-1的平方根了。平方根的另一个

值由点 $-i=(0,-1)$ 给出。值得注意的是，表示为 i 的点 $(0,1)$在平面上是完全确定的。虽然，i 通常被称为“虚数单位”，但这一称谓一点也不妨碍它在平面上的实际存在。

以上构造的数系比实数系大，我们称之为*复数系*。和所定义的运算结合在一起，平面上的点被称为*复数*。要证明任意复数都可以用实数及数 i 借助这些运算来表示并不困难。例如，给定点 (a,b)，由加法的定义，下式显然成立：

$$(a,b)=(a,0)+(0,b).$$

其中被加数$(a,0)$在横轴上，因而是实数 a；由乘法的定义，第二个加数$(0,b)$ 可写成形式

$$(0,b)=(b,0)(0,1).$$

上式右边的第一个因子是实数 b，而第二个因子是i，因而有

$$(a,b)=a+b\mathrm{i},$$

其中的加法及乘法按平面上点的运算理解.

利用复数的这一规范写法，我们马上可以重写先前的复数运算公式如下：

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i},$$

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i},$$

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i},$$

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

应该注意到以上定义的平面上点的乘法与分配律完全一致：如果在上面的第 2 个等式的左边用二项式相乘的法则计算乘积（它本身来源于分配律），利用等式 $\mathrm{i}^2=-1$，再合并同类项，将恰好等于等式的右边.

§2 开方及二次方程

有了复数，不仅可以计算 -1 的平方根，还可以求得任意复数的平方根，通常它们总是两个不相等的值。如果 $-a$ 是负数，即 $a>0$，则

$$\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,\mathrm{i},$$

其中 $\sqrt{a}$ 是正数 a 的算术平方根。

对于实系数一元二次方程，现在可以说，即使 $b^2-4ac<0$，方程也有两个不相等的根，不过这时是复根。

不仅仅限于实数，现在也能对任意复数求平方根了。例如，对于复数 $a+b\mathrm{i}$ 有

$$\sqrt{a+b\mathrm{i}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)},$$

其中的 $\sqrt{a^2+b^2}$ 都是算术平方根。读者一定会看到，对于任意 a 及 b，上式右边的第一项及 i 的系数都是实数。右边的两个根式中的任意一个都有两个值，它们按下面的规则组合：如果 $b>0$，则两个根式的正值相加及两个根式的负值相加；反过来，如果 $b<0$，则一个根式的正值与另一个根式的负值相加。

例1 计算复数 $21-20\mathrm{i}$ 的平方根。

此时有

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{441+400}=29,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}(21+29)}=\pm 5,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}=\sqrt{\frac{1}{2}(-21+29)}=\pm 2.$$

因为 $b=-20$，即 $b<0$，所以必须依相反的符号将后两个根式相加，即得

$$\sqrt{21-20i}=\pm(5-2i).$$

会求复数的平方根后，我们就能解任意复系数的二次方程了。其实，二次方程求根公式的推导对复系数二次方程仍然成立，而且，公式中平方根的计算可以归结为（如前面所表明的）计算两个正实数的平方根。因此，任意复系数二次方程有两个根，有时这两个根相等，即得到1个重根。

例 2 解方程

$$x^2-(4-i)x+(5-5i)=0.$$

由二次方程求根公式得

$$x=\frac{(4-i)\pm\sqrt{(4-i)^2-4(5-5i)}}{2}$$

$$=\frac{(4-i)\pm\sqrt{-5+12i}}{2}.$$

用上一段中叙述的方法计算上式中的平方根得

$$\sqrt{-5+12i}=\pm(2+3i).$$

因此

$$x=\frac{(4-i)\pm(2+3i)}{2}.$$

从而方程的两个根是

$$x_1=3+i,\qquad x_2=1-2i.$$

容易验证它们都满足方程。

下面，我们讨论计算复数的 n 次方根的问题，其中 n 是任意一个正整数。可以证明，对于任意一个复数 a，恰好存在 n 个不同的复数，每个数的 n 次方幂（即自乘 n 次）都等

于 a．换言之，下面这条非常重要的定理成立：

任意一个复数的 n 次方根恰好是 n 个不相同的复数．

由于实数只是复数的特殊情形，因此这条定理也完全适用于实数，即：实数 a 恰好有 n 个不相同的 n 次方根，一般情形下它们是复数．在所有这些方根中可能有两个、1 个或 0 个实数，视数 a 的正负及指数 n 的奇偶而定．

因此，1 有 3 个立方根：

$$1,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad 及\quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

易证这 3 个数中的每一个的立方都等于 1．1 的四次方根有 4 个数：

$$1,\ -1,\ i\ 及\ -i.$$

在本节开始时，我们给出了计算复数 $a+bi$ 的平方根的公式．这一公式归结为去计算两个正实数的平方根．遗憾的是，当 $n>2$ 时，没有一个公式能将复数 $a+bi$ 的 n 次方根用某些辅助实数的方根的实值表示出来；已经证明没有这种公式能够导出．复数的 n 次方根一般是由将复数表成所谓的三角式而得到的，但这一课题并不是本文所讨论的内容．

§3 三 次 方 程

二次方程的求根公式适用于复系数方程．对于三次方程，我们也可以导出一个公式（尽管比较复杂），用系数及根式表示方程的根．这一公式对任意复系数方程也适用．

给定方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

令

$$x = y - \frac{a}{3},$$

即对方程的未知数作变换，将 x 的上述表达式代入方程，得到关于未知数 y 的一个三次方程，这一方程形式较简单，因为其中 y^2 的系数等于 0． y 的一次幂的系数及常数项分别是数

$$p = -\frac{a^2}{3} + b, \qquad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c,$$

即方程为

$$y^3 + py + q = 0.$$

新方程的根减去 $\frac{a}{3}$，就得到原方程的根．

新方程的根可用其系数按下面的公式给出：

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

我们知道每个三次根式都有 3 个值．但这些值不能随意结合．非常巧的是，取定第一个根式的一个值后，第二个根式的值必须选择得使它们的乘积等于 $-\frac{p}{3}$．将这两个根式的值加起来就得到方程的根．如此我们得到方程的 3 个根．从而每一个数字系数的三次方程都有 3 个根，一般情形下是复数根；显见某些根可能相等，即组成重根．

上面所得公式的实用价值是非常小的．因为，如果系数 p 及 q 都是实数，则可以证明：若方程

$$y^3 + px + q = 0$$

有 3 个不相等的实根，则表达式

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

将是负的．由于公式中平方根式中的数是负的，因此平方根

是复数，于是在两个立方根号内的数都是复数。上一节我们曾提到，复数的开三次根要用到复数的三角式，因此我们只能依靠查表，仅仅近似地完成。

例1 方程

$$x^3-19x+30=0$$

中不含未知数的平方项，因此不用预先作变换就可以用前面的公式。此时 $p=-19$，$q=30$，因此

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{784}{27},$$

即是负的。于是公式中第一个三次根式是

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-15+\sqrt{-\frac{784}{27}}}=\sqrt[3]{-15+i\sqrt{\frac{784}{27}}}.$$

我们不可能将这个三次方根表成实数的方根，因而不能用公式解出此方程。但由直接验证，可知方程的3个根分别是整数2,3及 -5。

实际上，前文介绍的三次方程的求根公式仅当表达式 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ 是正数或0时才能用于得到方程的根。在第一种情形时，方程有1个实根和两个复根；而在第二种情形时，方程的3个根都是实根且其中的一个是重根。

例2 解三次方程

$$x^3-9x^2+36x-80=0.$$

令

$$x=y+3,$$

得到“简化”方程

$$y^3+9y-26=0.$$

应用公式得

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=196=14^2.$$

因此有

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{13+14}=\sqrt[3]{27}.$$

这三次根式的一个值是3．已知公式中第2个三次根式相应的值与此值的乘积应等于数$-\frac{p}{3}$，即等于-3．因而第2个根式的值是-1，于是简化方程的一个根是

$$y_1=3+(-1)=2.$$

求得了三次方程的一个根后，就有许多种不同的方法去求方程的另外两个根了。例如，可以算出$\sqrt[3]{27}$的其它两个值，并计算第2个根式的相应值，然后分别相加．或者，也可以在简化方程的左边除以$y-2$，然后只需要解一个二次方程．任意一种做法都将得到简化方程的另外两个根是

$$-1+i\sqrt{12}\quad 及 \quad -1-i\sqrt{12}.$$

于是，最初的三次方程的3个根是

$$5,\ 2+i\sqrt{12}\quad 及 \quad 2-i\sqrt{12}.$$

其实，上面的例子是精心挑选的，根式的计算并不总是如此简单．大量的情形是作近似计算，仅仅得到方程根的近似值．

§4 用根式解方程及方程的根的存在性

四次方程也可推导出求根公式，将方程的根用系数表示出来．由于含有更多的“多层”根式，因此公式比三次方程的求根公式更为复杂，而且它的实际应用范围也非常局限．不过，这个公式证明了，数字系数的四次方程有4个复根，其中有些可能是实根．

大约在16世纪时，人们就已获得了三次及四次方程的求

根公式，并进而企图去发现五次及更高次方程的求解公式。n 次方程的一般形式是

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

其中 n 是正整数。这一努力未获成功，直到19世纪初，有人证明了如下的结论：

对于大于或等于5的整数n，不可能找到一个公式，将任意 n 次方程的根用方程系数通过根式表示出来。

另外，对于大于或等于 5 的任意整数 n，有理系数的 n 次方程的根不可能用只是以整数或分数作为被开方数的根式表示出来，无论公式的形式如何复杂也不行。方程

$$x^5-4x-2=0$$

就是一个例子。

可以证明这个方程有 5 个根，其中 3 个是实根，2 个是复根，但没有 1 个根可以用根式表示出来，也就是说，这个方程“用根式是不可解的”。因此，能组成整数系数方程的根的数，既可以是实数也可以是复数(这种数被称为代数数，这是相对于超越数，即不是任何一个整数系数方程的根的数而言)，大大多于能用根式表示出来的数。

代数数理论是代数学的一个重要分支。俄国数学家E.I. Zolotarev(1847—1878)，G.F.Voronoi(1868—1908)及N.G. Chebotarev(1894—1947)等在这一领域里作出过许多重要贡献。

Abel(1802—1829)证明了，想用根式去导出解$n\geq5$次方程的一般公式是不可能做到的。Galois(1811—1832)证明：存在一个整数系数方程，用根式是不可能解出来的。他还得到了可以用根式解出来的方程的条件。这里涉及到一门新的深奥的理论，称为群论。应用群的概念才有可能最终地解决

这一问题。后来发现，在数学及其他科学的许多分支中，群也有许多应用，因而群已成为代数研究中的一个重要课题。我们不准备涉足这一概念，只想说一句，即现在苏联数学家在群论研究中占领先地位。

如果只是讨论在实际工作中如何导出方程的根，则即使没有$n(n\geqslant 5)$次方程的求根公式也并不引起严重的困难。有许多方法可以用于求方程的近似解，即使对于三次方程，用这些方法也比用公式(如果可以用)加上实数开方根的近似计算要快得多。但是，解二次、三次及四次方程的公式的存在性证明了这些方程分别有2个、3个及4个根。那末，n次方程究竟有多少根呢？

如果存在一个数字系数(实数或复数)方程，它没有实根或复根，则数的王国还必须进一步扩大。幸好没有这种必要，因为对于解任意数字系数方程，复数就足够了。下面的定理保证了这一点：

任意数字系数的任意n次方程都有n个根，它们是复根或某些是实根；其中有些根可能相等，即是重根。

这条定理被称为高等代数的基本定理。它是由D'Alembert(1717—1783)和Gauss(1777—1855)证明的，可追溯到18世纪，但是他们的证明直到19世纪才完全严格化；目前，关于这条定理的不同的证明有好几十个。

基本定理中提到的重根的概念，其意义理解如下。可以证明，如果一个n次方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

有n个根，记为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则方程的左边可因式分解为

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$= a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

反过来，如果方程的左边可以作如上的分解，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是方程的根。在数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中可能有若干个是相等的。譬如，设$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k$但 $\alpha_1\neq\alpha_l$，$l=k+1,k+2,\cdots,n$，即在方程左边的因式分解中因式$x-\alpha_1$出现k次，则当$k>1$时，根 α_1 被称为是重根，或更准确些，称为k重根。

§5 实根的个数

高等代数基本定理在理论研究中具有十分重要的应用，但它并不提供求方程根的具体方法。然而，许多技术性问题要求了解实系数方程根的有关信息。由于在实际工作中，方程系数本身是测量的结果，因而并不必定要求知道有关根的确切情况，只需近似知道就行了，当然精确程度依赖于测量的精确度。

给定一个实系数 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

已知它有 n 个根。其中有没有实根呢？如果有，则有几个？近似地位于什么位置？我们具体回答这些问题如下。记方程左边的多项式为$f(x)$，即令

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

学过函数概念的读者知道我们是在将方程左边视作变量 x 的函数进行处理。取定 x 的任意一个数值 α 并将其代入$f(x)$的表达式，在做完所有的运算后，我们将得到一个数，称之为多项式$f(x)$的值，记为$f(\alpha)$。例如

$$f(x)=x^3-5x^2+2x+1$$

及$\alpha=2$，则有

$$f(2)=2^3-5\cdot2^2+2\cdot2+1=-7.$$

下面，我们用描点法作出多项式$f(x)$的图像。先在平面上选定一个坐标系(见图2)，在选取x的值α并算出相应的多项式$f(x)$的值$f(\alpha)$后，在平面上标出一个点，使它的横坐标是α，纵坐标是$f(\alpha)$，即标出点$(\alpha,f(\alpha))$。如果能对所有的α都这样做，则平面上的这些点就组成一条曲线。它与横轴的交点或与横轴相切的点的横坐标α将满足$f(\alpha)=0$，从而是方程的实根。

不幸的是，由于α值可取无限个，因而不可能标出所有的$(\alpha,f(\alpha))$点，于是，只要标出有限个点就应感到满足。为简便起见，我们挑选若干个正整数和负整数的α值，在平面上标出相应的点，然后用一条尽可能光滑的曲线将它们连结起来。有一个结果证明了，只需取在$-B$和B之间的整数值α就可以了，其中的B定义如下：设$|a_0|$是方程中x^n的系数的绝对值(不妨插一句，如果$a>0$，则$|a|=a$；如果$a<0$，则$|a|=-a$)，并记A是其他系数$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$的绝对值中的最大者，则

$$B=\frac{A}{|a_0|}+1。$$

但是，经常发生的情况是，这个界还是太大。

例1 用描点法画出多项式

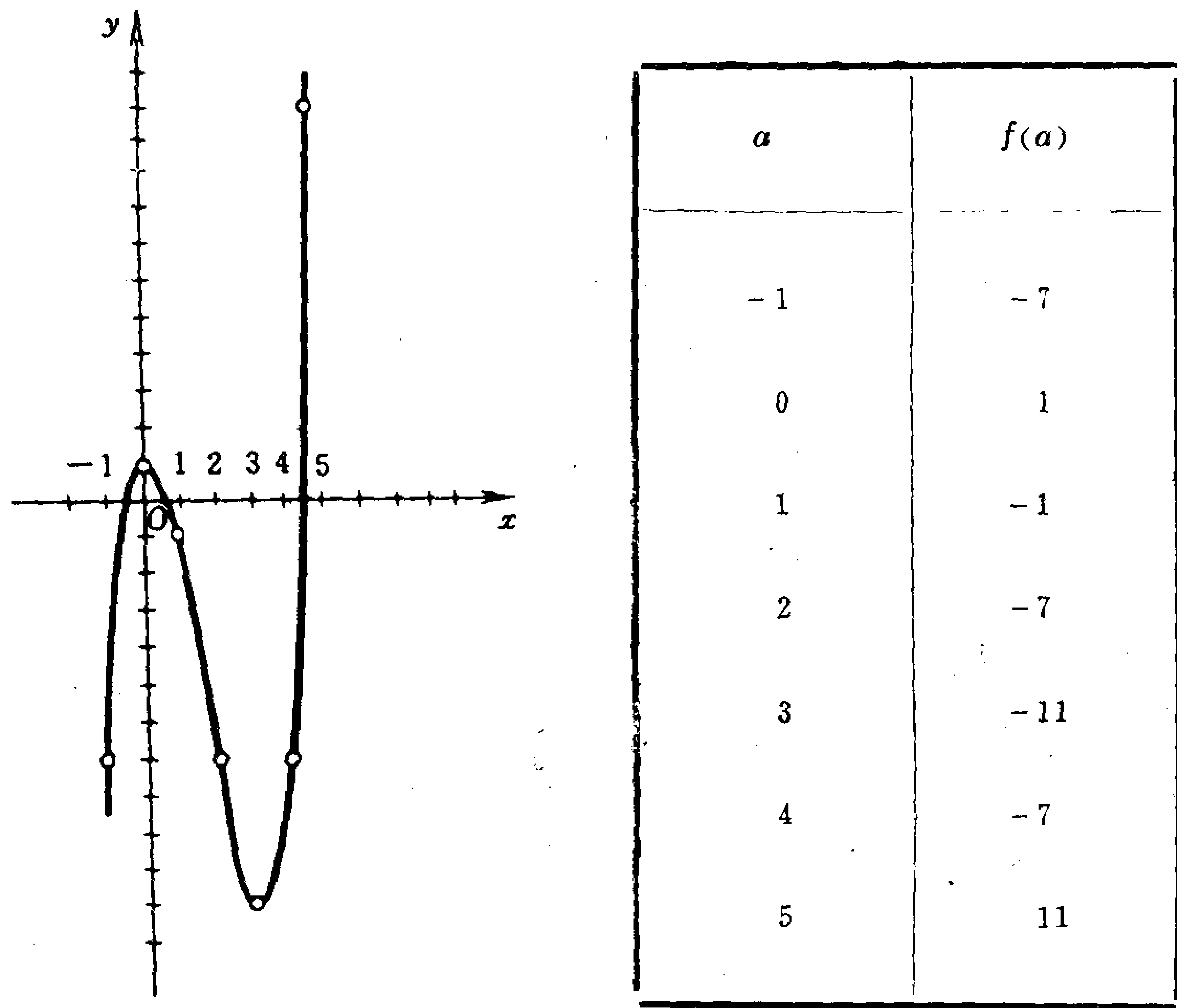
$$f(x)=x^3-5x^2+2x+1$$

的图形。这时$|a_0|=1$及$A=5$，因此$B=6$。其实，在这个例子中，我们只需取在-1和5之间的α值就行了。我们将这些值及相应的多项式$f(x)$的值列成表格并作出图形(见图3)。

由图3可知，方程的所有3个根α_1,α_2及α_3都是实根，且它们分别位于：

$$-1<\alpha_1<0,\ 0<\alpha_2<1,\ 4<\alpha_3<5。$$

可以看到，实际上并不一定要画出图形，因为可以发现图形和横轴的交点是在这样的两个相邻的 a 值之间，与它们相应的 $f(a)$ 取相反的正负号，因此只需审视表格中 $f(a)$ 的值



a	$f(a)$
−1	−7
0	1
1	−1
2	−7
3	−11
4	−7
5	11

图 3

就行了．

在上面的例子中，如果发现图形与横轴的交点少于3个，也许会认为这是由于图形不完整（我们只凭7个点画出曲线），从而遗漏了方程的其它几个根．但是，有好几种方法能确切地告诉我们方程究竟有几个实根，甚至也能告诉我们在任意两个给定的数 a 及 b $(a<b)$ 之间究竟有几个实根．但我们不打算在这儿叙述这些方法．

下面的定理有时是很有用的，因为它们告知了有关实根(甚至正根)的存在性的信息。

任意奇数次实系数方程至少有一个实根。

如果实系数方程中的首项系数 a_0 与常数项 a_n 的符号相反，则方程至少有一个正根。另外，如果这个方程还是偶数次的，则它至少有一个负根。

因此，方程

$$x^7 - 8x^3 + x - 2 = 0$$

至少有一个正根，而方程

$$x^6 + 2x^5 - x^2 + 7x - 1 = 0$$

既至少有一个正根又至少有一个负根。所有这些借助于图像都很容易证实。

§6 方程的近似解

在上一节中，我们找到了一些相邻的整数值，使得方程

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$$

的实根在它们之间。同样的方法可以使这个方程的根更精确地被找到。例如，我们考虑根α_2，它在 0 和 1 之间。对于 $x = 0.1, 0.2, \cdots, 0.9$，分别计算这个方程的左边$f(x)$的值，可以发现在其中的两个相邻的 x 值之间，多项式$f(x)$的图形与横轴相交，即可以计算根α_2的值精确到十分之一。

继续这样做下去，则我们可以求得根 α 的值精确到百分之一，千分之一等等，或者，在理论上，可以精确到我们所希望的任意精确度。但是，这种做法涉及到一大堆繁琐的计算，而且马上会发现难以实际完成。从而导致了去创造各种

能快得多地去近似计算方程实根的近似值的方法。下面介绍其中最简单的一种并应用它去求前面讨论的三次方程的实根α_2。但首先要做的一件有用的事情是寻找比我们已经知道的界限(即$0<\alpha_2<1$)要更窄一些的界限。为此先计算方程的根精确到十分之一。如果读者对$x=0.1,0.2,\cdots,0.9$，分别计算多项式

$$f(x)=x^3-5x^2+2x+1$$

的值，则会得到

$$f(0.7)=0.293,\qquad f(0.8)=-0.088,$$

因为二者的符号正相反，所以有

$$0.7<\alpha_2<0.8.$$

我们介绍的方法如下。给定一个n次方程，方程的左边记为$f(x)$；并且已知方程有一个实根α(不是重根)在a和b之间，$a<b$。如果界限$a<\alpha<b$已经充分狭窄了，则有一个公式可算得根α的两个新的界限c和d，使比原来的界限要狭窄得多，也就是说，更精确地确定了根α的位置。这时，或者有$c<\alpha<d$，或者有$d<\alpha<c$。

界限c由公式

$$c=\frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}$$

算得。

在我们的例子中$a=0.7$，$b=0.8$，$f(a)$及$f(b)$的值见前。因此，

$$c=\frac{0.8\cdot0.293-0.7\cdot(-0.088)}{0.293-(-0.088)}$$

$$=\frac{0.2344+0.0616}{0.381}=0.7769\cdots.$$

计算界限 d 的公式需要引进一个新概念，它在这儿只起辅助作用，实际上，这一概念属于数学的另一个分支——微积分。

给定一个 n 次多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n,$$

称 $(n-1)$ 次多项式

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}$$
$$+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1}$$

是前一个多项式的导数，记为 $f'(x)$。这个多项式是按下面的规则由 $f(x)$ 导出的：多项式 $f(x)$ 的每一项 a_kx^{n-k} 乘上 x 的指数 $n-k$，再将 x 的指数本身减去 1；另外，常数项 a_n 消失，因为可将其视作 $a_n=a_nx^0$。

还可以再求多项式 $f'(x)$ 的导数，它将是一个 $(n-2)$ 次多项式，被称为多项式 $f(x)$ 的二阶导数，记为 $f''(x)$。

因此，对于我们所讨论的多项式 $f(x)=x^3-5x^2+2x+1$，有

$$f'(x)=3x^2-10x+2$$

及

$$f''(x)=6x-10.$$

界限 d 现在可以计算了，它由公式

$$d=a-\frac{f(a)}{f'(a)},\qquad d=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$$

给出。下面的规则指示如何选取以上两个公式中的一个。如果两个界限（a 及 b）已被选取得充分接近，则在 $x=a$ 和 $x=b$ 处，二阶导数 $f''(x)$ 通常将有相同的正负号，而 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的正负号相反，这后一点是我们早已知道的。如果 $f''(a)$ 和

$f(a)$的正负号相同，则必须按第1个公式计算 d，即其中用到界限 a 的公式；但是，如果 $f''(b)$和 $f(b)$的正负号相同，则必须用第2个公式，其中用到界限 b。

在我们所讨论的例子中，对于$a=0.7$和$b=0.8$，二阶导数$f''(x)$都是负的。因而，由于 $f(a)>0$及 $f(b)<0$，所以必须用第2个公式去计算界限 d。由 $f'(0.8)=-4.08$ 得

$$d=0.8-\frac{-0.088}{-4.080}=0.8-0.0215\cdots=0.7784\cdots.$$

于是，对于根α_2，我们求得了比先前更窄的界限：

$$0.7769\cdots<\alpha_2<0.7784\cdots,$$

或者，略微宽一些，

$$0.7769<\alpha_2<0.7785.$$

如果取α_2为已算得的两个界限的算术平均值(即两数和的一半)，则

$$\alpha_2=0.777,$$

其误差不超过0.0008，等于两个界限的差的一半。

如果所得的精确度还不够，则可以再用一次上面介绍的方法去求根α_2的新界限。不过，这时会涉及更复杂的计算。

求方程的近似解的其他方法可以有更高的精确度。其中的一个不仅可以用于计算方程的实根，也能用于计算复根的近似值的最好的方法，是由俄国数学家 N.I.Lobachevsky (1793—1856)建立的，他是非欧几何的创立者。

§7 域

在前几节中讨论的代数方程求根问题，可以在更广泛的形式中进行考虑。为实现这一目标，我们在此介绍代数学中

的一个最重要的概念。

先看一下下面的3个数系：有理数集，实数集和复数集。我们可以在每个数集中分别进行加、减、乘、除(除了除以0以外)运算，而不离开数集本身。但所有整数的集合却没有这条性质，因为除法并不总能做(例如数2不能整除5)；所有正实数的集合也不行，因为减法并不总能做。

读者已经熟悉了诸如多项式的加法和乘法及物理学中的力的加法等这些不是以数为对象的代数运算。附带地说，在定义复数时我们还考虑了平面上的点的加法和乘法。

一般说来，设集合P给定，它可能是由数组成的，也可能是由几何个体组成的，或者可能是由我们称之为集合的元素的任意个体组成的。在集合P中定义加法及乘法运算，即对于P中的任意一对元素a及b，指定P中一个完全确定的元素c称为它们的和：

$$c=a+b;$$

同时指定P中一个完全确定的元素d，称为它们的积：

$$d=ab.$$

在其上定义了加法及乘法运算的集合P被称为是一个域，如果这些运算具有下列5条性质：

Ⅰ. 两种运算都是可交换的，即对任意a及b有

$$a+b=b+a, \quad ab=ba.$$

Ⅱ. 两种运算都是可结合的，即对任意a,b及c有

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc).$$

Ⅲ. 乘法关于加法的分配律成立，即对任意a,b及c有

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Ⅳ. 可以做减法，即对于任意 a 及 b，方程

$$a+x=b$$

在 P 中有唯一的根。

Ⅴ. 可以做除法，即对于任意 a 及 b，只要 a 不等于0，方程

$$ax=b$$

在 P 中有唯一的根。

条件Ⅴ中提到了 0，它的存在性可以从条件Ⅰ—Ⅳ导出。实际上，如果 a 是 P 中的任意一个元素，则由条件Ⅳ，存在 P 中的一个元素满足方程

$$a+x=a$$

（b 也可以取成 a 本身）。由于这个元素与 a 的选取有关，因此记作 0_a，即

$$a+0_a=a. \tag{1}$$

如果 b 是 P 中另外一个任意元素，则也存在唯一的元素 0_b 满足等式

$$b+0_b=b. \tag{2}$$

若能证得 $0_a=0_b$ 对任意 a 和 b 成立，则在 P 中存在一个元素，对所有的元素 a 都起着 0 的作用，下面，我们来证明这一点。

设 c 是方程

$$a+x=b$$

的根，它的存在性由条件Ⅳ保证，因此有

$$a+c=b.$$

在等式(1)的两边同时加上元素 c，由于和的唯一性，因此

等号仍成立，即

$$(a+0_a)+c=a+c.$$

上式右边等于 b；由条件Ⅰ及Ⅱ，上式左边等于 $b+0_a$。因此

$$b+0_a=b.$$

将此式与等式(2)比较，根据条件Ⅳ，方程 $b+x=b$ 只有一个根，因此我们最终得到

$$0_a=0_b.$$

这就证明了，在任何域 P 中都有 0 元素，即，存在元素 0 使对 P 中任意元素 a，等式

$$a+0=a$$

成立，因而条件Ⅴ是完全有意义的。

我们已经知道了域的 3 个例子——有理数域，实数域及复数域，同时也知道所有整数的集合及正实数的集合都不是域。除了这 3 个域外，存在有无数个域。例如，在实数域和复数域里包含有许多不同的域，它们统称为数域。但有些域比复数域大。这些域的元素不再被称为数，但由它们组成的域在数学研究中会被用到。下面介绍这种域的一个例子。

考虑任意复系数和任意次数的所有可能的多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中的 0 次多项式就是复数本身。复系数多项式按照我们熟知的法则可以进行加减乘运算，但并不构成域，因为一个多项式被另一个多项式除时，结果并不一定是多项式。

考虑两个复系数多项式的比

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

称之为复系数的有理函数(其中 $g(x)\neq 0$——译注)，并将它们视作分式那样处理. 于是，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

当且仅当

$$f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x).$$

此外有

$$\frac{f(x)}{g(x)}\pm\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)v(x)\pm g(x)u(x)}{g(x)v(x)},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}.$$

0 元素的作用是由分子为 0 的分式扮演的，即形式为

$$\frac{0}{g(x)}$$

的分式. 显然，所有这种类型的分式都相等. 最后，如果分式$\frac{u(x)}{v(x)}$不等于 0 ，即 $u(x)\neq 0$，则有

$$\frac{f(x)}{g(x)}:\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)v(x)}{g(x)u(x)}.$$

容易检验有理函数及以上运算符合域的定义中的所有条件，因此可以称之为复系数的有理函数域. 因为分子和分母都是 0 次多项式的有理函数就是复数，而所有的复数又都能写成这种形式，所以复数域完全被包含在这个域内.

不要以为任意一个域不是被包含在复数域内就一定包含了复数域，有些域只是由有限个元素组成的.

只要用到域，我们就一定会讨论由这些域的元素作为系

数的方程，随之而来的是，这种方程的根的存在与否就是一个问题。例如，在某些几何问题中，我们会遇到以有理函数域的元素作为系数的方程，它们的根被称为代数函数。适用于数字系数方程的高等代数基本定理，对于以任意一个域的元素作为系数的方程就不再适用了，取而代之是以下的一般定理。

设P是一个域及

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

是一个n次方程，其系数是域P中的元素。结论是，这个方程的根，不管是在域P中还是在更大的域中，都不可能超过n个。同时，域P可以扩张为域Q（即Q是一个域且包含P——译注），使方程在Q中正好有n个根（其中有些可以是重根）。甚至下面的定理也是成立的：

任意一个域P都可以扩张为域$\overline{P}$，使得以P中元素或者甚至以$\overline{P}$中元素为系数的任意方程在$\overline{P}$中有根，而且根的个数正好等于方程的次数。

域$\overline{P}$称之为代数闭域。高等代数基本定理显示，复数域是一个代数闭域。

结　束　语

在这篇文章里，我们自始至终讨论一个变数的方程。在初等代数中，学了一次方程之后学习二次方程。另外，还从一元一次方程发展到二元一次方程组及三元一次方程组。大学里的高等代数课程继续沿着这一方向发展，教学生如何去解由n个一次方程组成的n元方程组及方程个数与未知数个

数不相等的方程组。包含在矩阵论中的一次方程理论及其他一些有关理论组成了代数学中的一个特殊分支——线性代数，它被广泛应用于几何及其他一些数学学科，也被广泛应用于物理及理论力学。

必须记住，代数方程及线性代数的理论现在与许多科学有联系。由于数学及物理的其他一些相关分支的要求，集合（其中定义了代数运算）的研究至关重要。除了域论（其中还包含代数数及代数函数的理论）外，环论的研究也很活跃。环是一个定义了加法和乘法的集合，这些运算只要求满足域的定义中的条件Ⅰ—Ⅳ，所有整数的集合就是一个环。在本书中，我们还提到了代数学中另一个非常重要的分支，即群论。群是定义了一种运算——乘法——的集合，且乘法必须是可结合的，另外，可以毫无约束地做除法。

我们经常会遇到一些非交换的代数运算（例如乘积随因数交换位置而改变的乘法）及非结合的代数运算（例如，3个因数相乘的乘积随括号的位置不同而改变的乘法）在用根式求方程的解的讨论中用到的那些群是非交换群。

（朱学贤译，　刘　勇校）

编者按 陈省身先生在“二十一世纪的数学”（数学进展，第21卷，第4期，1992，385—389)一文中指出：“一个数学家应当了解什么是好的数学，什么是不好的或不大好的数学。有些数学是具有开创性的，有发展的，这就是好的数学。还有一些数学也蛮有意思，但渐渐变成一种游戏了。……让我举例来谈谈。大家是否知道有个拿破仑定理？这个定理也许和拿破仑并没有关系，却也蛮有意思。定理是说任给一个三角形，在各边上各作等边三角形，然后将这三个等边三角形的重心连起来，又是一个等边三角形。各边上的等边三角形也可朝里面做，得到两个解，等等。这个数学就不是好的数学，因为它难有进一步发展。当然，如果你感到累了，愿意想想这些问题，也蛮有意思，这好像一种游戏。那么什么是好的数学？比方说解方程就是。搞数学都要解方程。”“一次方程易解，二次方程就不同。

$$x^2-1=0$$

有实数解。

$$x^2+1=0$$

就没有实数解。后来就加进复数，讨论方程的复数解。大家知道的代数基本定理就是 n 次代数方程必有复数解。……欧拉就曾研究过代数基本定理，结果一直没有证出来。后来还是高斯发现了复数与拓扑有关系，有了新的理解。因为模等于1的复数表示一个圆周，在这圆周上就会有很多花样。第一个会证明代数基本定理的是高斯，而且给了不止一个证明。”

本文就是介绍这一个“不是好的数学”，却“也蛮有意思”的实例——拿破仑定理及其有关问题。在本书的另一文“任意次代数方程”中介绍“好的数学”——解方程。让大家对什么是不好的数学和好的数学有一点具体的认识，提高我们对此问题的鉴别能力，引起大家的重视。以使我们在中学生的课外活动中尽可能地把“好的数学”介绍给他们。

一个"不好的数学"的例子
——Napoleon，Escher与平面拼铺问题

J.F.Rigby

前言 Napoleon（拿破仑）和Escher（埃希尔）都有以他们的名字命名的有关三角形的定理。不过，Napoleon本人是否具备足够的几何学知识来证明Napoleon定理（[3,p.63]）尚不得而知，但Escher本人显然未曾给出Escher定理的后一部分的证明。其实，Escher定理的前一部分正是Napoleon定理的某种形式的逆定理，而且这两个定理都可以用平面拼铺方法来证明，这种用全等的图形拼铺平面的方法，相信已为Escher所知，并为他所爱好。

给定任意一个三角形，我们可以用与这个三角形全等的三角形及三种规格的等边三角形来拼铺平面，如图1所示。图中那些最小的等边三角形的中心显然是如图2中实线所示的等边三角形网格的顶点，而其余的两种规格的等边三角形的中心则恰好落足这些三角形的中心上。因此我们从图2可以看到，所有这些实线的等边三角形的中心及其顶点构成了更小的等边三角形网格（如图中虚线所示）的顶点。图3(a)是图1的局部，因此图3(a)中的三个等边三角形的中心恰好是另一个等边三角形的三个顶点，这就是熟知的Na-

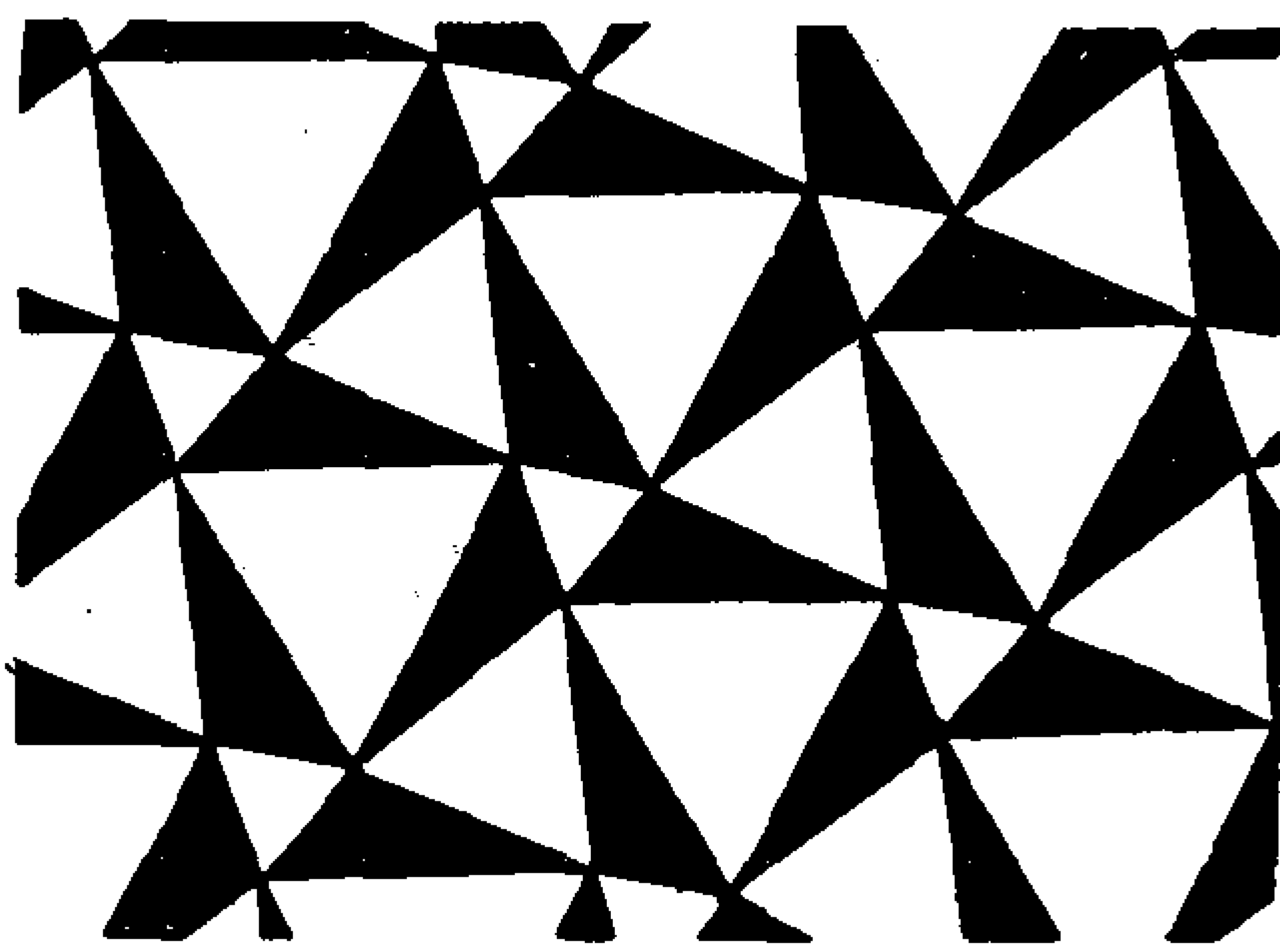


图 1

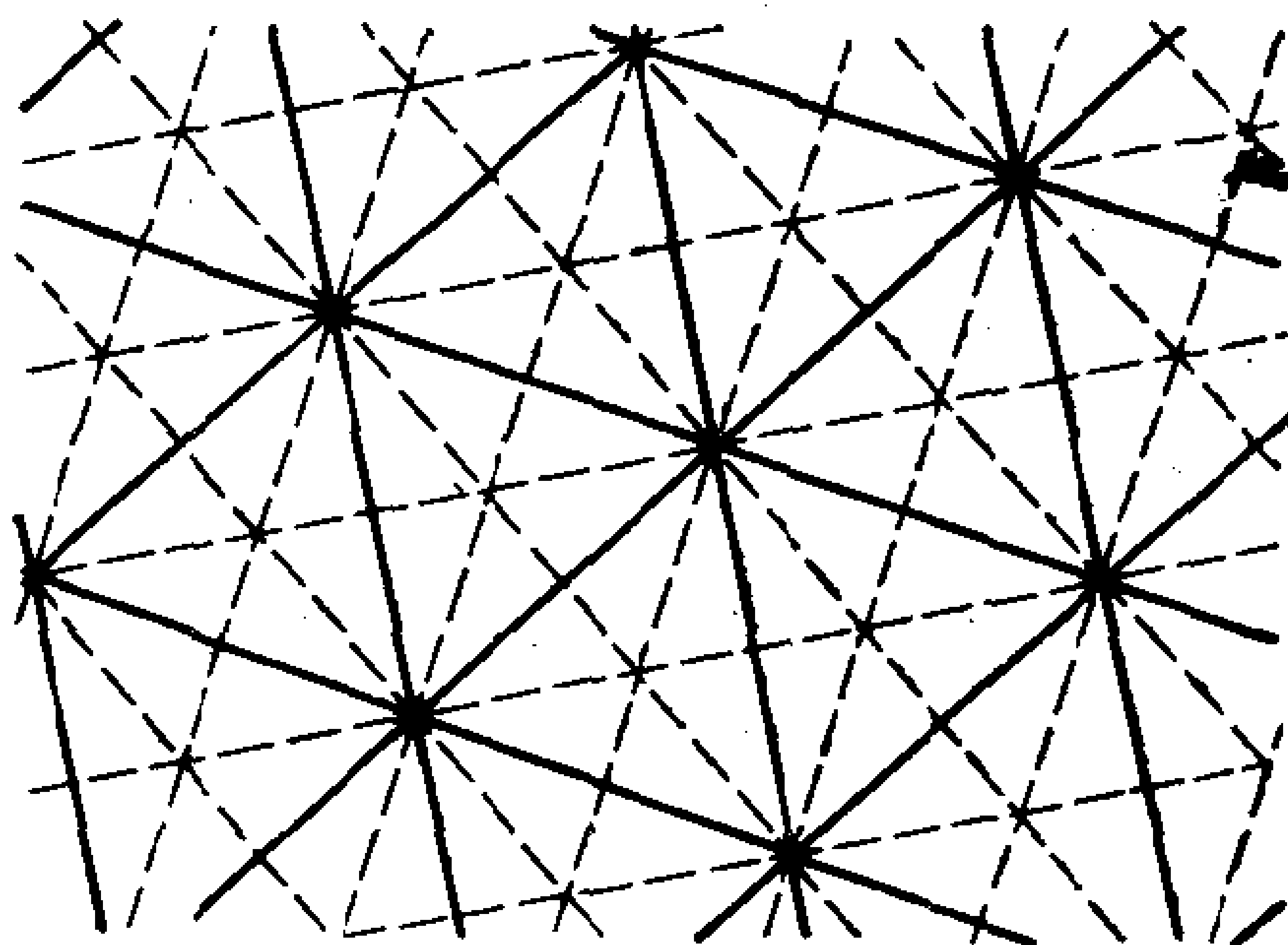


图 2

poleon 定理①．上面给出的证明可在[9]中找到，那里还绘有一张图用以说明：如果把拼铺的思想推广一下，像图3(b)那样向给定的三角形内部的方向作出三个等边三角形，则同样的结果可类似地证得．（另外，[9]中还有一些有意思的推广，考虑作出的三个不是等边三角形，而是相似三角形，有兴趣的读者可以查阅一下．——译者注）

① 我们在文末附录中给出了一个几何证明．——译者注

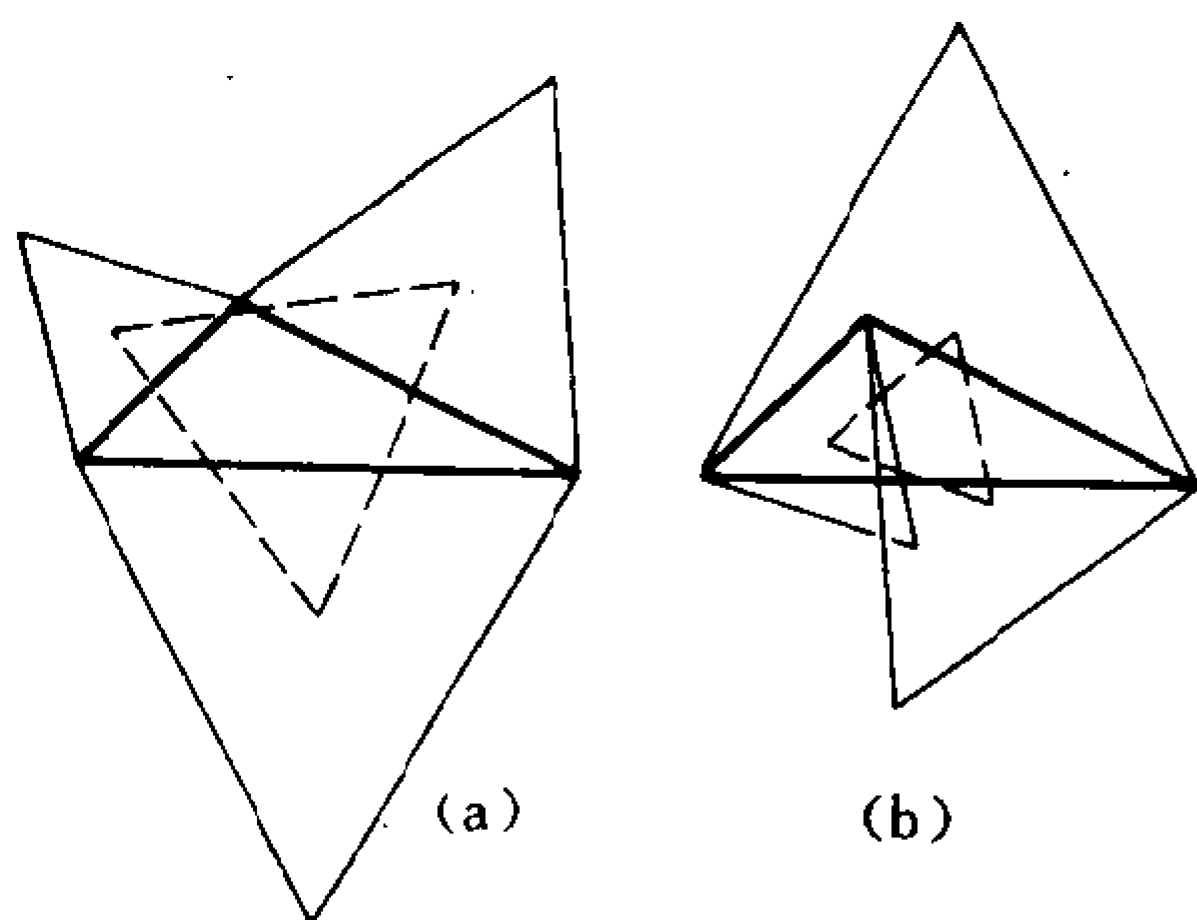


图 3

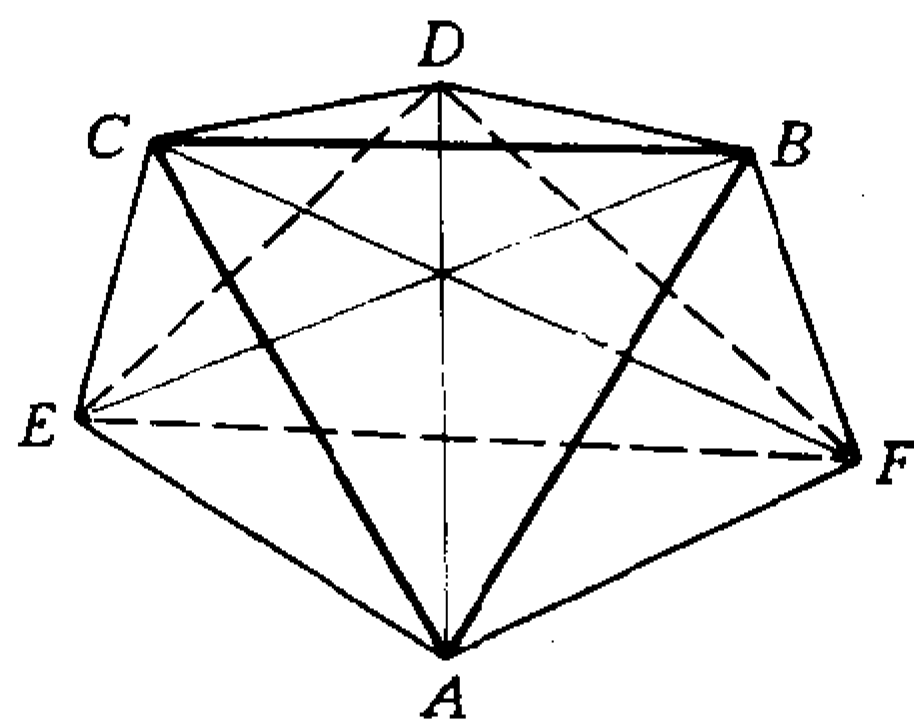


图 4

在荷兰画家 M. C. Escher 的一本笔记中有一些关于一类特殊的六边形的有趣的结果。虽然这些结果在此之前就已知道，但我们仍用 Escher 定理的标题把它们组织在一起。这个定理可叙述如下：

定理 (i) 设 ABC 是一个等边三角形，E 是任意一点（见图4）。设点 F 使得 $AF=AE$ 且 $\angle FAE=120°$，而点 D 使得 $BD=BF$ 且 $\angle DBF=120°$，则 $CE=CD$ 且 $\angle ECD=120°$。

(ii) 可以用与 $AFBDCE$ 全等的六边形拼铺平面。

(iii) 图 4 中的直线 AD, BE, CF 共点。

Escher 的笔记已由 Doris Schattschneider([10]) 教授编辑出版。她在给我的一封信中谈到："Escher 很可能已经知道 F. Haag 的论文（[5]）中的那种特殊的拼铺六边形。这篇文章及早一些的一篇文章（[4]）列在由 Escher 的异父（或异母）兄弟 B. G. Escher 在1937年提供给他的文献目录上。他相当仔细地研究了论文[5]，复制了许多图，其中包括上面所说的特殊六边形的拼铺图。从这两篇文章我认为，Haag并没有提及这个六边形的对角线。事实上，Escher

在陈述他的定理时，在有关对角线部分的句子下划了线，但并未给出参考文献和证明。这使我确信，那是Escher自己的发现。他还在给儿子George的信中询问他是否能够证明这一结果。”

为了证明(i)，我们对三角形DEF应用Napoleon定理。因为点A是以EF为边作出的等边三角形的中心，点B是以FD为边作出的等边三角形的中心，所以由Napoleon定理，分别以三角形DEF的各边作出的三个等边三角形的中心为顶点确定一个等边三角形，而已知ABC是等边三角形，因此C必定是以DE为边作出的等边三角形的中心。这就得到了所要的结论(i)。

机敏的读者也许会注意到：以EF或FD为边可以作出两个等边三角形，从而以AB为边的等边三角形也有两个，因此上面给出的证明不严谨。但是定理本身也并没有作出足够严谨的陈述！例如，图5满足定理的条件，而且$\angle FAE$和$\angle DBF$也是按同样的转向度量的，但是定理的结论却不成立。这是因为三角形ABC有“错误的定向”。这个问题可以用更仔细地推敲这个定理的陈述得到解决，而这一点大概并未困扰Escher，所以也不必让它来困扰我们。

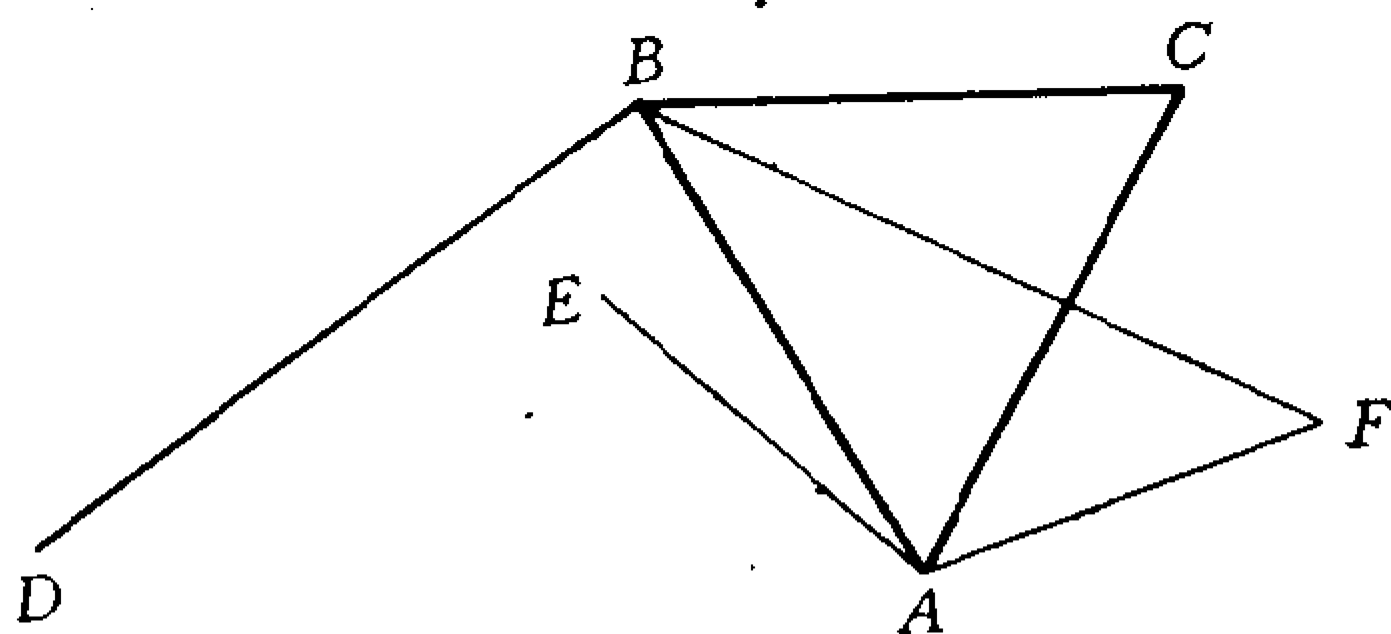


图 5

如图 6 所示，通过做每个等边三角形的中心与该三角形的三个顶点的连线，由图 1 立即可以得到(ii)中的拼铺。

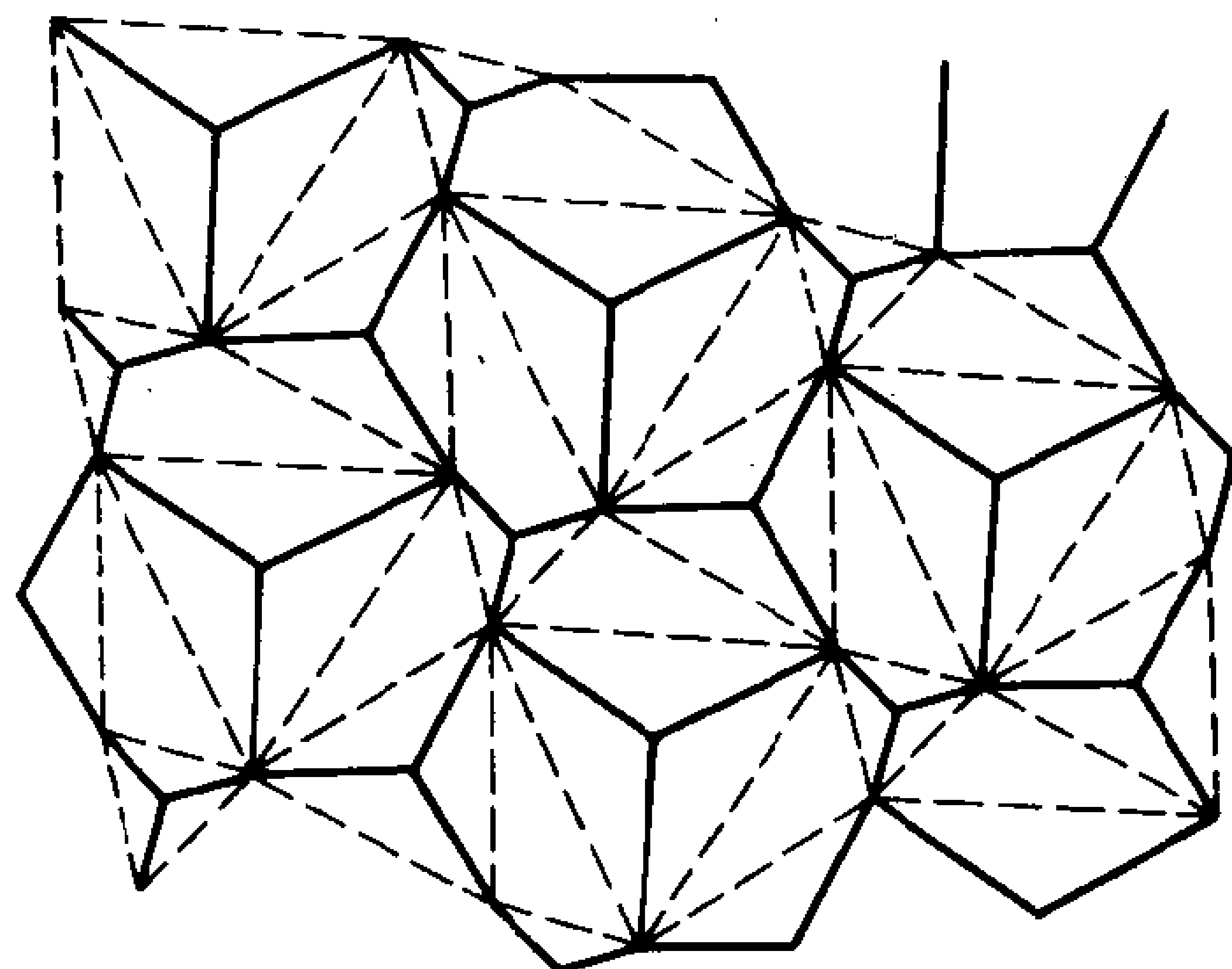


图 6

Escher 定理的第三部分是下述结果的一种特殊情况（见图7）。

设 $A'EF, B'FD, C'DE$ 是从三角形 DEF 各边向外作出的相似的等腰三角形。则直线 $A'D, B'E, C'F$ 共点。还可以证明，当等腰三角形的形状改变时，这些直线交点的轨迹是过点 D, E, F 的一条等轴双曲线。

这些结果的证明可在[2]或[8]中找到。Hans Cornet 提供了另外三篇参考文献：Escher 定理特殊情况的证明见[6]和[7]；一般情况下共点性的一个证明可参见 O. Bottema的书（[1]，第一版，第36页，第二版，第51页），这个证明非常简短和精美，值得在此予以重述。

在图 7 中，

$ED''/D''F = \triangle EDA'/\triangle FDA'$（△表示三角形的面积）

$$=\frac{1}{2}DE\cdot EA'\sin(DEF+\varphi)\bigg/\left[\frac{1}{2}FD\cdot FA'\sin(DFE+\varphi)\right]$$

$$=DE\sin(DEF+\varphi)/[FD\sin(DFE+\varphi)].$$

利用这个等式及另外两个类似的式子，可得

$$(ED''/D''F)(FE''/E''D)(DF''/F''E)=1,$$

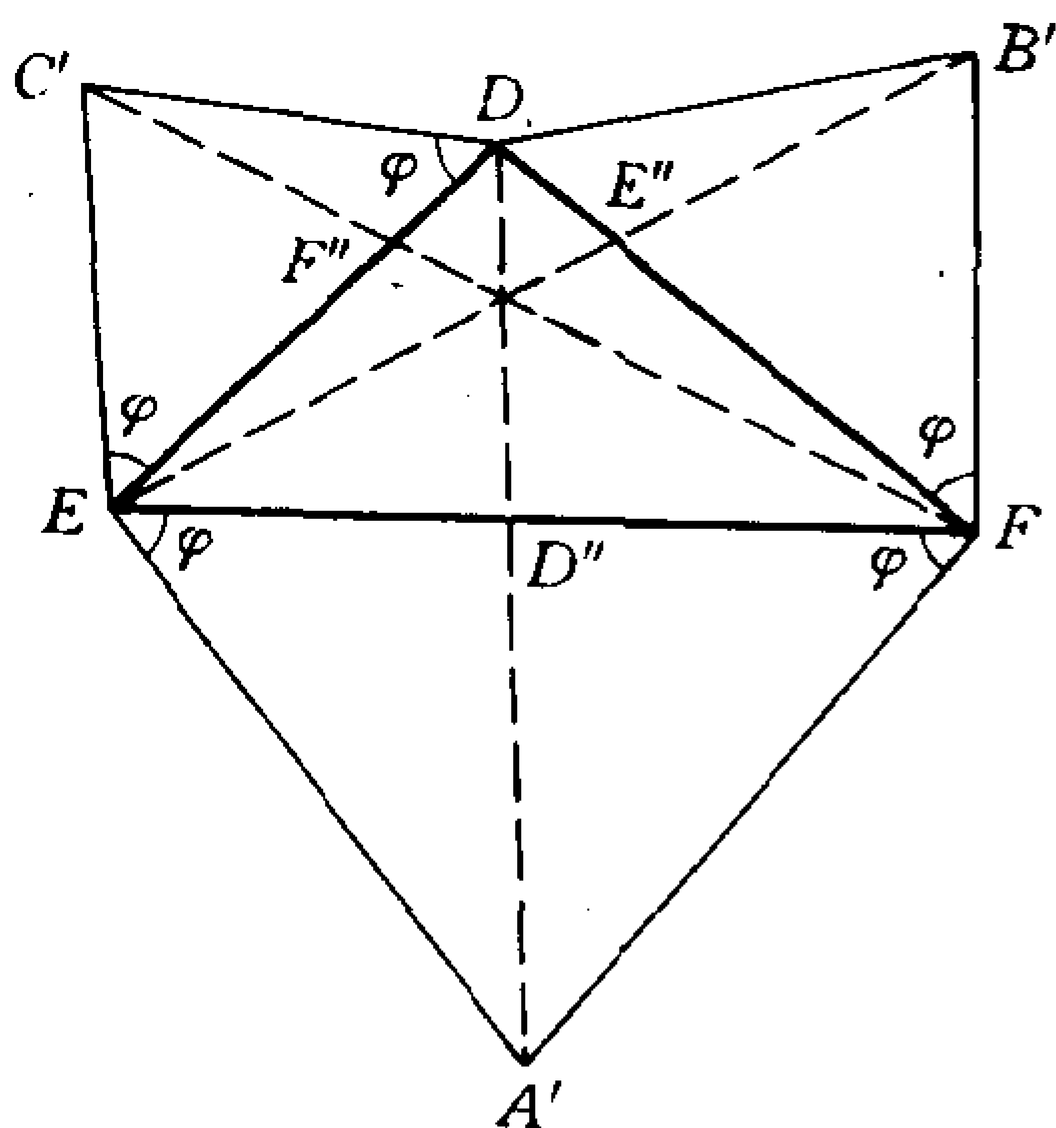


图 7

于是由 Ceva 定理① 的逆定理就可得出所需的结论。

这里再介绍一下 Escher定理的特殊情形的另一种证明，其中用到六边形拼铺的旋转和平移性质。设 AD 和 BE 交于点X（见图 8），则C是等边三角形 XGJ的中心，因此

$$JG\perp CX. \qquad (*)$$

又 A是等边三角形 XKY 的中心，因此 $XY\perp AK\parallel ZF$。类似地有 $ZX\perp BL\parallel YF$。因此F是三角形 XYZ 的垂心。如此由$(*)$得

$$XF\perp YZ\parallel JG\perp CX.$$

因而CXF 是一条直线，即 CF 过点X。

---

① 在文末附录中给出了定理的叙述。——译者注

在与 Doris Schattschneider 的继续通信中提到了更多的趣事。原先我并不知道 Escher 的拼铺，现在发现他的笔记“抽象图案”的第10号拼铺与图 1 惊奇地相似。图 9 则展示了同一本笔记中 Escher的第11号拼铺的基本特征。它用 4 种全等的拼铺六边形组成，在原文中每一种(六边形)都有特定的颜色，这种图形的构造方法可如下描述：图 8 中的基本的拼铺可经由向量 AA_1, AA_2, AA_3（彼此间的夹角为60°)所确定的三个基本平移变到它自身。如果我们把这个拼铺沿这些方向作平移，但只移动一半距离，就可得到图9(a)的其它三种形式的拼铺（图9(b)中的六边形与图 8 中的那些六边形形状不同，但并不影响上述方法）。关于这种复合拼铺的最有趣的事实是：在任意一种拼铺的任意一个六边形内都有分别属于其他三种拼铺的各一条共点的边。下面给出这个事实的简短证明。

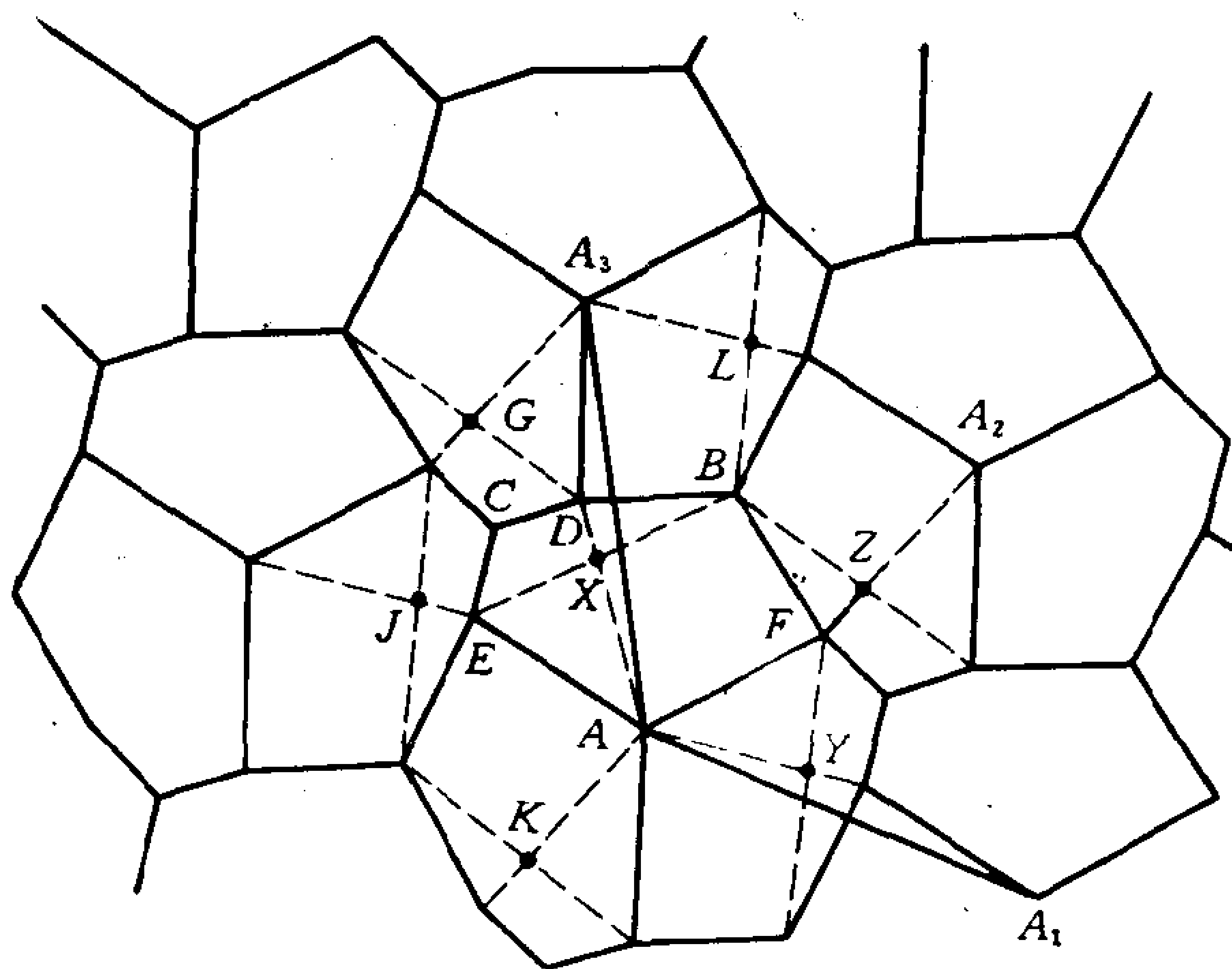
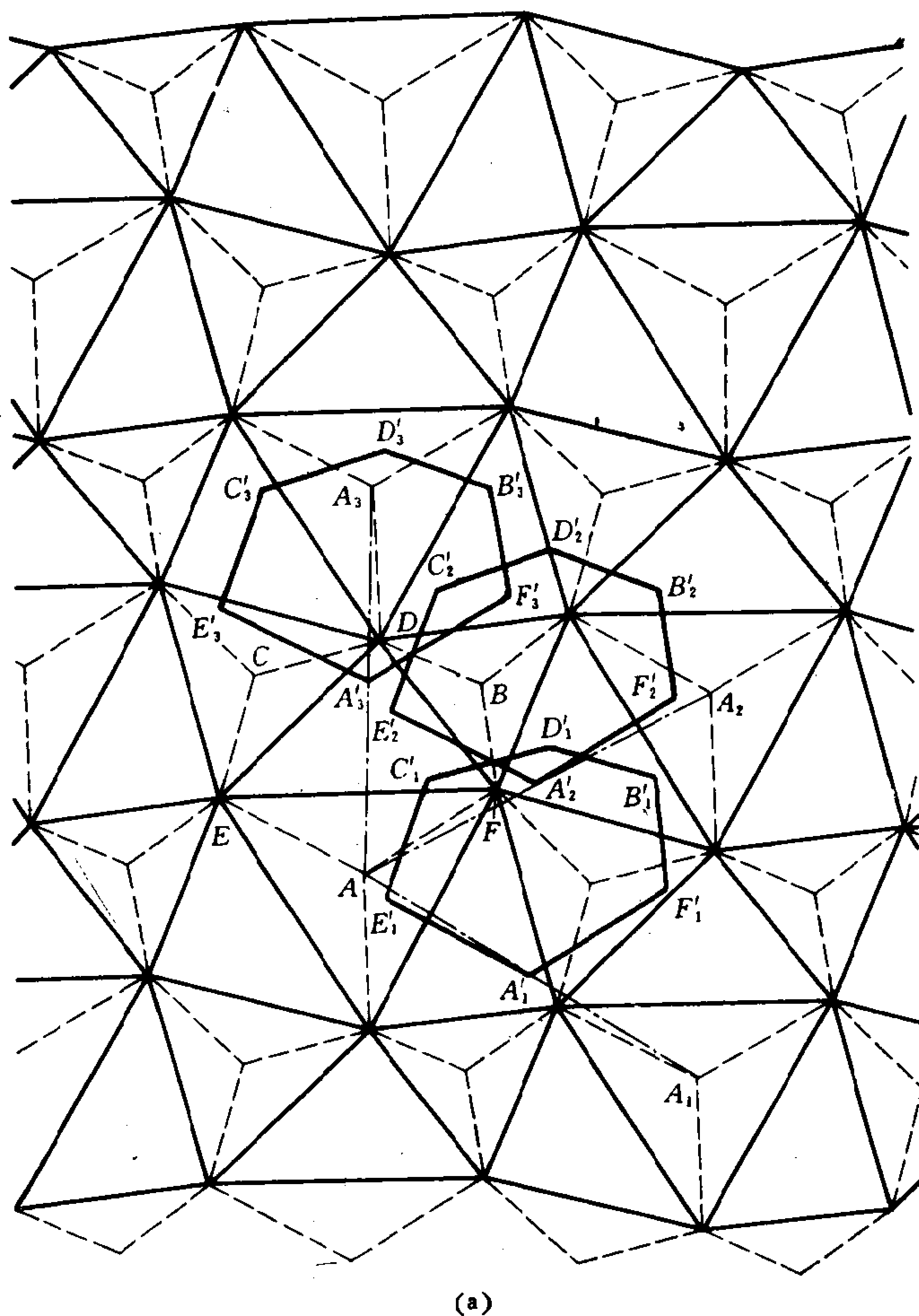
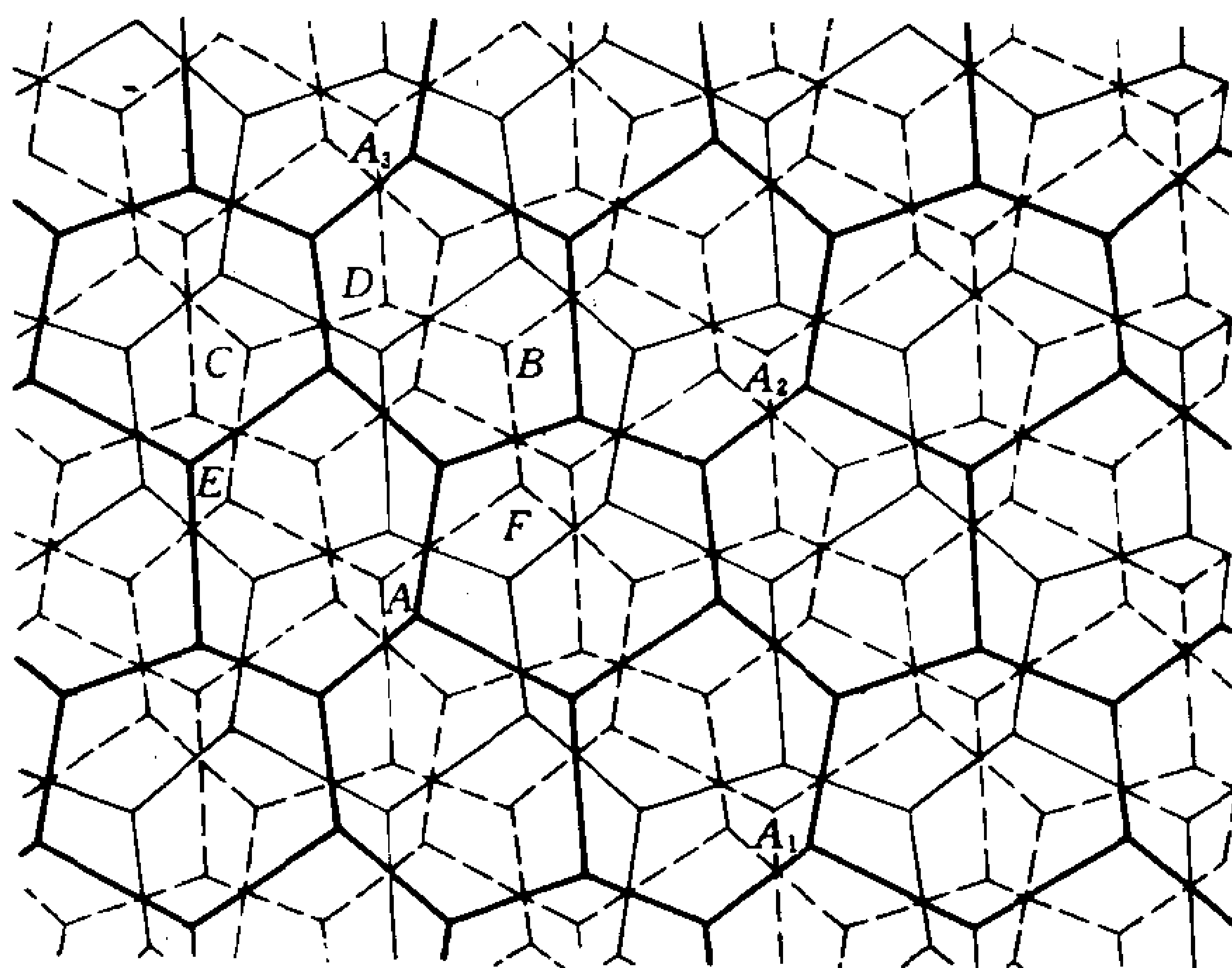


图 8

图10表示原始拼铺的局部（及与它相应的三个等边三角形，试与图 6 比较）和其他三种拼铺的三条有关的边．设O



(a)



(b)

图 9

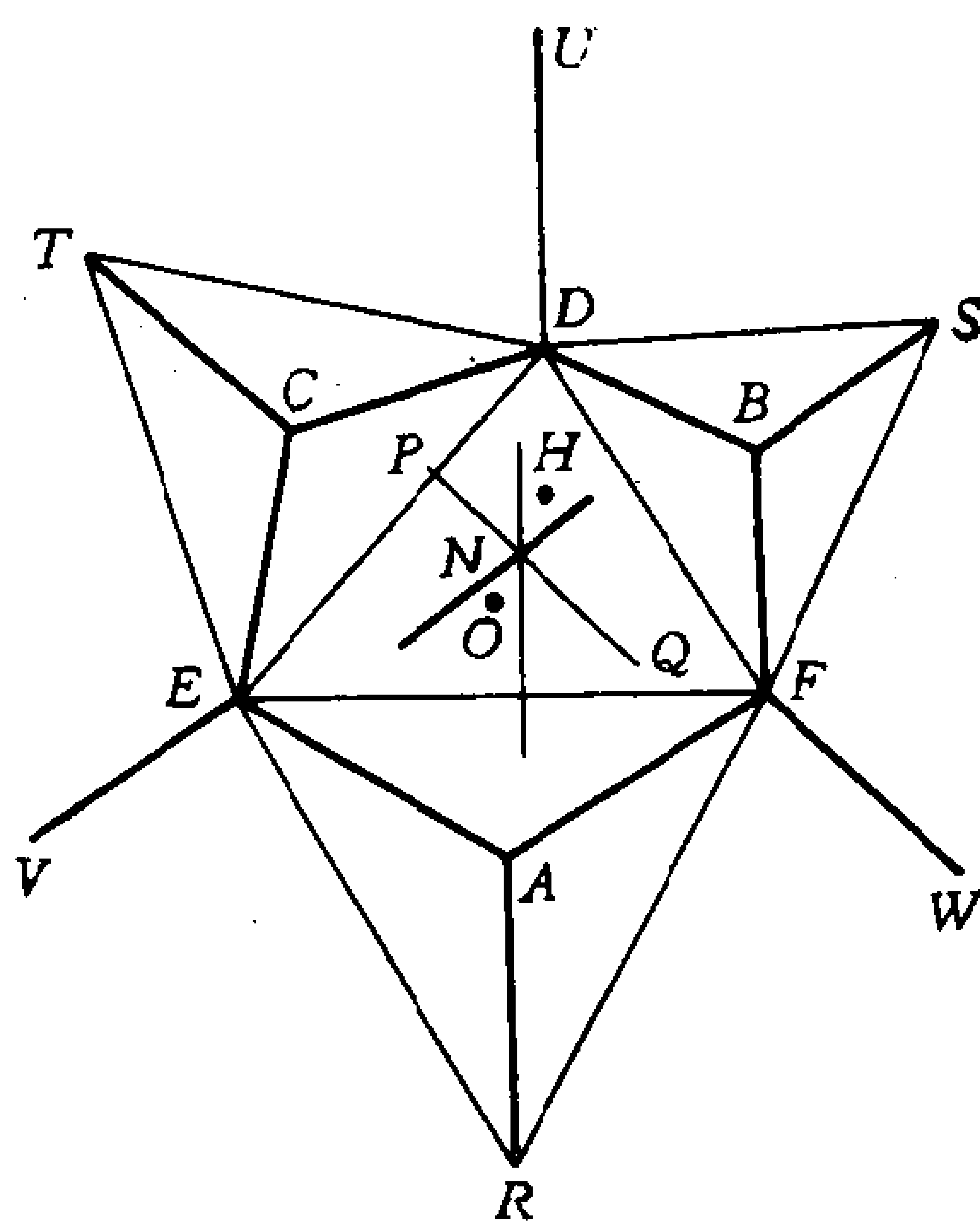


图 10

和H分别是三角形DEF的外心和垂心，N是OH的中点，则N是三角形DEF的九点圆①的中心。因为C是等边三角

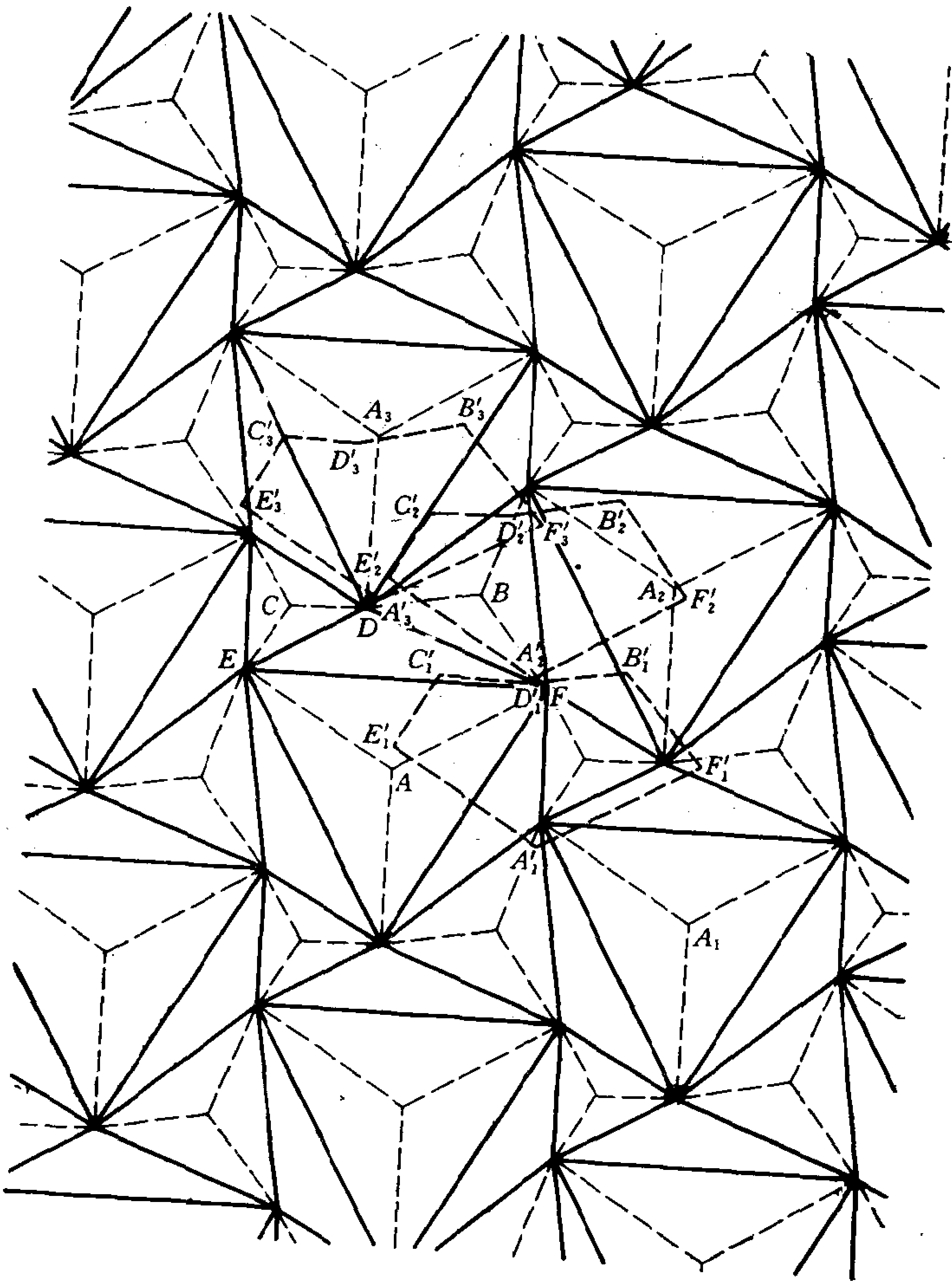


图 11

① 九点圆的定义见附录。——译者注

形 DTE 的中心，直线 TC 是 DE 的垂直平分线，因而TC过点O。又因 FW 平行于TC，与 DE 垂直，因此 FW 是三角形 DEF 的一条高，所以过点H。由上面讲过的基本平移，TC 变为 FW。沿同一方向但距离只有它的一半的平移，将 TC 变为另一种拼铺的边 PQ,PQ 位于 TC 和 FW 的中间，因此 PQ 过O和H的中点N。类似地，在此图中所示的其他两种拼铺也各有一条边过点N。

如果我们用图 8 中所示形状的六边形构造这种复合拼铺，则刚才所证明的定理仍然成立，但其中有一条边必须延长后才能与其他两边交于一点。可以证明，出现这种情况是由于图 8 中三角形 DEF 的$\angle DFE$ 小于 $30°$ 的缘故（见图 11）。

参 考 文 献

[1] O. Bottema, Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde, Servire, Den Haag, 1944, *Epsilon, Utrecht*, 1987.

[2] W.J. Courcouf, Back to areals, *Math. Gazette* 57 (1973), 46—51.

[3] H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, Washington, DC, 1967.

[4] F. Haag, Die regelmässigen Planteilungen, *Zeitschrift für Kristallographie* 49 (1911), 360—369.

[5] F. Haag, Die regelmässigen Planteilungen und Punktsysteme, *Zeitschrift für Kristallographie* 58(1923), 478—488.

[6] Frère Gabriel-Marie, *Questions de Géométrie, Tours, Paris*, 1918.

[7] M. Hain, *Repr. Educ. Times, New Series* VII (1905) *no.* 10349.

[8] J.F. Rigby, A concentrated dose of old-fashioned ge-

ometry, *Math. Gazette* 57 (1973), 296—298.

[9] J.F.Rigby, Napoleon revisited, *J. of Geometry* 33 (1988), 129—146.

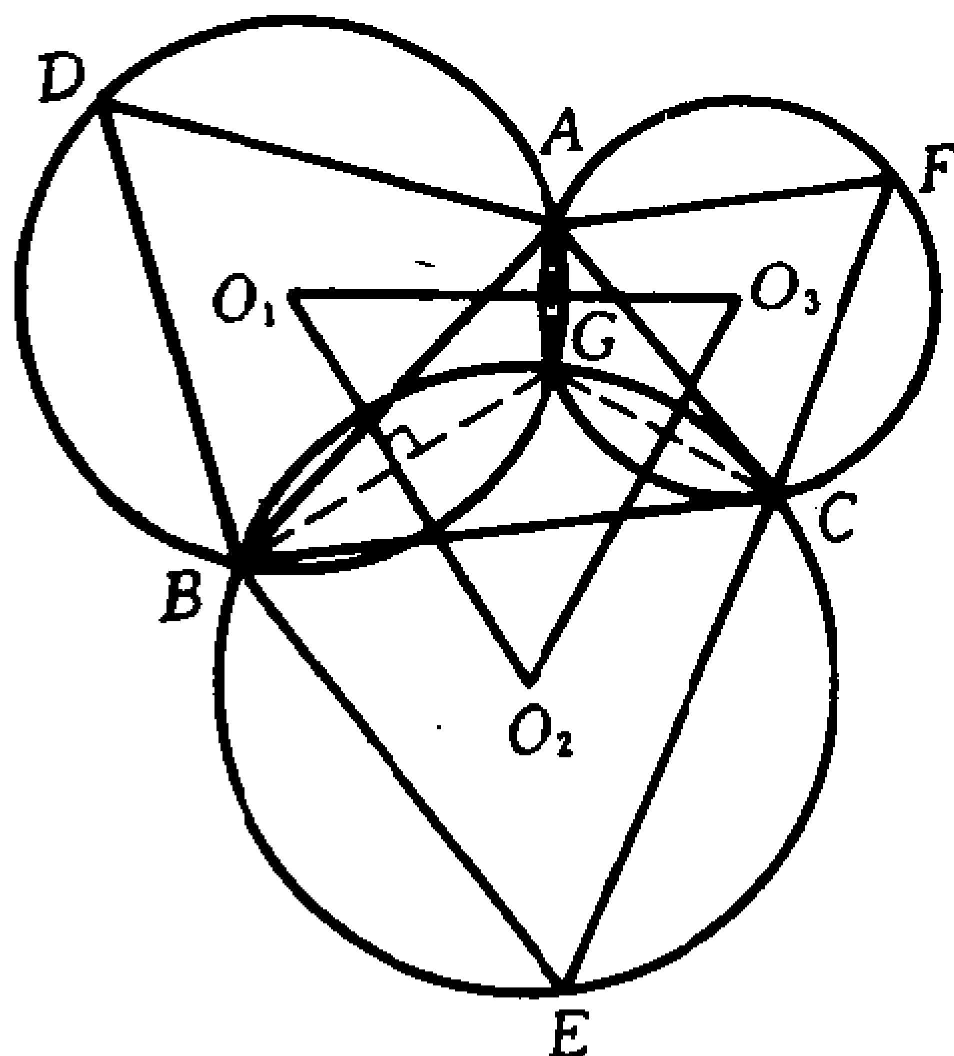
[10] Doris Schattschneider, Visions of Symmetry: Notebooks, Periodic Drawings, and Related Works of M. C. Escher, W.H. Freeman & Co., New York, 1990.

(刘　燕编译，潘承彪审校)

附　　录

1．Napoleon 定理

Napoleon 定理　若在任意三角形的各边上向外作等边三角形，则它们的中心构成一个等边三角形。



证明　如左图所示．在已知三角形 ABC 的各边上，向外分别作等边三角形 ADB，BEC，CFA。设它们的中心分别是 O_1、O_2 和 O_3。分别作 $\triangle ADB$，$\triangle BEC$ 和 $\triangle CFA$ 的外接圆 O_1、O_2 和 O_3。设 $\odot O_2$ 和 $\odot O_3$ 交于 G 和 C。连接 AG, BG 和 CG。显见

$$\angle BGC = 180° - \angle E = 120°,$$
$$\angle CGA = 180° - \angle F = 120°.$$

从而

$$\angle AGB = 360° - \angle BGC - \angle CGA = 120°.$$

于是，

$$\angle AGB+\angle D=120^\circ+60^\circ=180^\circ,$$

即点 G 也在 $\odot O_1$ 上，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 共点于 G。

因为 BG 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的公共弦，所以 $O_1O_2\perp BG$；同理 $O_1O_3\perp AG$。由四边形的内角和得

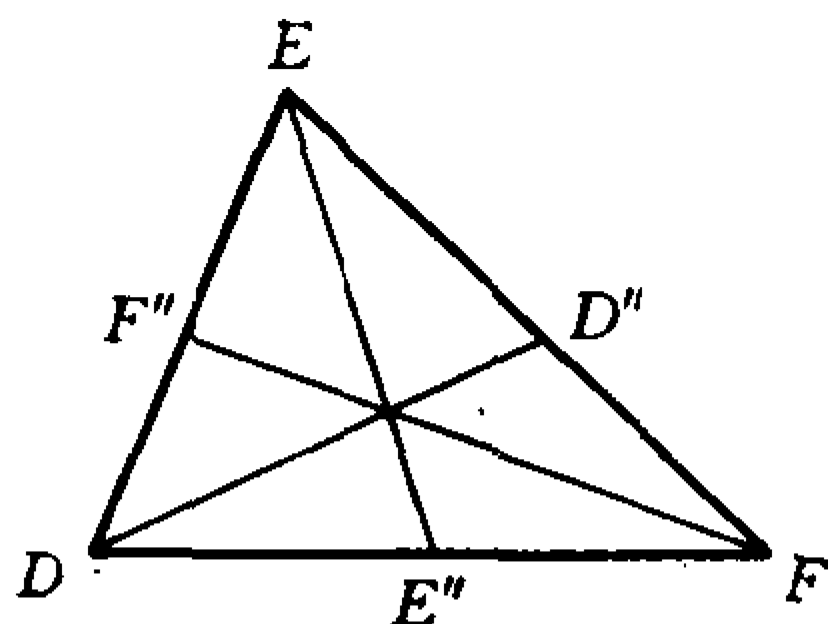
$$\angle O_1=180^\circ-\angle AGB=60^\circ.$$

同理可证 $\angle O_2=60^\circ$，$\angle O_3=60^\circ$。因此 $\triangle O_1O_2O_3$ 是等边三角形。证毕。

2. Ceva 定理和九点圆定理

Ceva 定理 设 DD'', EE'', FF'' 分别是经过三角形 DEF（如图）的各顶点的 Ceva 线（三角形的一个顶点与其对边上任意一点的连线叫做 Ceva 线）。如果这三条线共点，则

$$\left(\frac{ED''}{D''F}\right)\left(\frac{FE''}{E''D}\right)\left(\frac{DF''}{F''E}\right)=1.$$



逆定理 若三条 Ceva 线 DD'', EE'', FF'' 满足关系式

$$\left(\frac{ED''}{D''F}\right)\left(\frac{FE''}{E''D}\right)\left(\frac{DF''}{F''E}\right)=1,$$

则这三条线共点。

定义　任意一个三角形的三条高线的垂足，三条边的中点，以及从顶点到垂心的三条连线的中点，都落在半径为 $R/2$ 的一个圆上。该圆叫做三角形的九点圆。

九点圆定理　九点圆圆心在三角形的欧拉线上（任意一个三角形的垂心、重心和外心共线，并且重心把垂心和外心的连线分成 2:1 的比。这三点所在的直线叫做三角形的欧拉线），并且它到垂心和外心的距离相等。

（参见《几何学的新探索》，H.S.M. 考克塞特，S.L. 格雷策著，陈维桓译，北京大学出版社，1986.）

（刘　燕编，朱学贤校）

第33届国际数学奥林匹克
竞　赛　试　题

1．求出所有满足如下条件的整数 a,b,c：

（i）$1<a<b<c$；

（ii）$(a-1)(b-1)(c-1)$是 $abc-1$的约数。

2．求出所有满足如下条件的实函数 f：对一切实数 x，y，有

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2. \qquad (*)$$

3．给定空间中的 9 个点，其中任意 4 点都不共面，并在每一对点之间都连一线段．试求出最小值 n，使得：在全部所连线段中任意取出 n 条，并将这 n 条中的每一条任意地染为红色或蓝色，则在这 n 条染色线段中必定有同色的三线段构成一个三角形。

4．设在一平面上给定一个圆周 Γ，及 Γ 的一条切线 l 和 l 上的一点M．试求出该平面上具有如下性质的点 P 的集合：在直线 l 上存在两个点 Q和 R，使得M是线段 QR 的中点，且 Γ 是三角形 PQR 的内切圆。

5．设 $Oxyz$ 是空间直角坐标系，S 是空间中的一个由有限个点构成的集合．再设 S_x,S_y,S_z 分别是 S 中的所有点在坐标平面 Oyz,Ozx,Oxy 上的正交投影构成的集合．证明：

$$|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|,$$

其中$|A|$表示有限集合 A中的元素个数．（注：所谓一个点

在一个平面上的正交投影是指由这点向该平面所作垂线的垂足。)

6. 对每个正整数 n，以 $S(n)$表示满足如下条件的最大整数：对每个正整数 $k\leqslant S(n)$，n^2 均可表为 k 个正整数的平方之和。

(a) 证明：对每个 $n\geqslant 4$，都有 $S(n)\leqslant n^2-14$；

(b) 试找出一个正整数 n，使得 $S(n)=n^2-14$；

(c) 证明：存在无穷多个正整数 n，使得$S(n)=n^2-14$。

第33届国际数学奥林匹克竞赛试题解答

潘承彪　朱学贤

编者按　第33届国际数学奥林匹克竞赛于1992年7月15、16日两天在莫斯科举行。我国选手取得了团体总分第一，全部获得金牌的好成绩。下面是试题解答。

第1题解答　为简化除数的形式，令

$$x=a-1,\ y=b-1,\ z=c-1.$$

因此，$abc-1=xyz+xy+yz+zx+x+y+z$。这样，题中的两个条件就等价于：(iii) $1\leqslant x<y<z$；(iv) $xy+yz+zx+x+y+z=rxyz$，r 为一正整数。

由 $xy+yz+zx+x+y+z=yz+z(x+1)+y(x+2)+x-y$ 及条件(iii)可得

$$yz<xy+yz+zx+x+y+z<3yz.$$

由上式及条件(iv)推出：$1<rx<3$，所以 $rx=2$。

若 $x=1$，则 $r=2$，且由(iv)得到

$$(y-2)(z-2)=5.$$

由此及(iii)知 $y=3$，$z=7$。因而有

$$a=2,\ b=4,\ c=8. \qquad (1)$$

若 $x=2$，则 $r=1$，且由 (iv)得

$$(y-3)(z-3)=11.$$

由此及(iii)知 $y=4$，$z=14$。因而有

$$a=3,\ b=5,\ c=15. \qquad (2)$$

显见，求出的(1),(2)两组值都是满足要求的解。因此，这就是满足本题要求的全部解。

(思考：把条件 $1<a<b<c$ 改为 $1<a\leqslant b\leqslant c$，将得到怎样的结果?)

第 2 题解答　下面给出两种解法。

解答一　(A) **f 应满足的更为显明的基本关系式**。令 $x=y=0$，由条件(*)得

$$f(f(0))=f^2(0)\geqslant 0. \qquad (1)$$

令 $x=0$，由条件(*)得

$$f(f(y))=y+f^2(0), \qquad (2)$$

由式(*)及(2)式推得

$$f(y+f^2(x))=f(f(x^2+f(y)))=x^2+f(y)+f^2(0). \qquad (3)$$

在式(*)中取 $x=u$，$y=f(0)$得到

$$f(u^2+f(f(0)))=f^2(u)+f(0).$$

在式(3)中取 $y=u^2$，$x=0$，利用上式及式(1)就有

$$f^2(u)-f(u^2)=f^2(0)-f(0). \qquad (4)$$

(B) **讨论 $f(0)$ 可能取的值**。在式(3)中取 $x=0$,并利用式(2),得到

$$f(f(y)+f^2(0))=f(f(y+f^2(0)))=y+2f^2(0).$$

在式(*)中取 $x=f(0)$后，和上式比较即得

$$(f(f(0)))^2=2f^2(0).$$

由此及式(1)就推得

$$f(f(0))=f^2(0)=0 \text{ 或 } 2. \tag{5}$$

下面分别来讨论这两种情形。

（C）$f(f(0))=f(0)=0$ 的情形。这时式(2)变为

$$f(f(y))=y. \tag{6}$$

这表明对任何实数 y_0，必有 x_0 使得 $f(x_0)=y_0$，因为只要取 $x_0=f(y_0)$即可。在式(3)中取 $x=f(u)$，利用上式可得

$$f(y+u^2)=f^2(u)+f(y)\geqslant f(y). \tag{7}$$

现在可由式(4)推出 $f(u^2)=f^2(u)\geqslant 0$，即

$$f(v)\geqslant 0,\quad v\geqslant 0.$$

由此及式(6)就得到(为什么)：

$$f(v)>0,\quad v>0. \tag{8}$$

由此及式(7)就证明了：$f(y)$是严格递增函数，即

$$f(y_1)>f(y_2),\quad y_1>y_2. \tag{9}$$

我们用反证法来证明：必有

$$f(y)=y. \tag{10}$$

若式(10)不成立，则必有 $y_0\neq 0$ 使

$$y_0\neq f(y_0).$$

若 $y_0>f(y_0)$，则由式(9)和(6)将推出

$$f(y_0)>f(f(y_0))=y_0,$$

和假设矛盾；若 $y_0<f(y_0)$，则类似地将推出

$$f(y_0)<f(f(y_0))=y_0,$$

也和假设矛盾。因此必有式(10)成立。

（D） $f(f(0))=f^2(0)=2$的情形。在式(4)中取 $u=2$ 得

$$f^2(2)-f(4)=2-f(0). \qquad (11)$$

另一方面，在式(3)中取 $y=x=0$ 得

$$f(2)=f(0)+2; \qquad (12)$$

取 $y=2$，$x=0$ 得

$$f(4)=f(2)+2. \qquad (13)$$

由式(11),(12)推出

$$f(4)=5f(0)+4.$$

而由式(12),(13)推出

$$f(4)=f(0)+4.$$

进而由以上两式得 $f(0)=0$，这和 $f^2(0)=2$ 矛盾。

综上所述，满足本题的函数必为 $f(y)=y$。

解答二 （A）设 $f(0)=c$。在(*)式中，令 $x=0$，$y=0$ 得

$$f(c)=c^2; \qquad (1)$$

令 $x=0$，$y=c$ 得(利用上式)

$$f(c^2)=c+c^2; \qquad (2)$$

令 $x=c$，$y=0$ 得

$$f(c^2+c)=c^4; \qquad (3)$$

令 $x=0$，$y=c^2$ 得

$$f(f(c^2))=c^2+c^2=2c^2. \qquad (4)$$

由(2)和(3)得

$$f(f(c^2))=c^4.$$

与(4)式比较得

$$2c^2=c^4,\ c=0,\ \sqrt{2}\text{或}-\sqrt{2}.$$

在(*)式中令$x=\sqrt[4]{2}$，$y=0$得

$$f(\sqrt{2}+f(0))=(f(\sqrt[4]{2}))^2\geqslant 0,$$

因此显然$f(0)\neq-\sqrt{2}$.

若$f(0)=\sqrt{2}$，则由(1)得$f(\sqrt{2})=2$. 在(*)式中令$x=2$，$y=\sqrt{2}$得(利用(2)式)

$$f(6)=\sqrt{2}+(\sqrt{2}+2)^2=6+5\sqrt{2};$$

令$x=\sqrt{2}$，$y=2+\sqrt{2}$得(利用(3)式)

$$f(6)=2+\sqrt{2}+2^2=6+\sqrt{2};$$

矛盾. 因此有$f(0)=0$.

(B) 在(*)中令$x=0$得

$$f(f(y))=y \tag{5}$$

对任意实数y成立；令$y=0$得

$$f(x^2)=(f(x))^2\geqslant 0 \tag{6}$$

对任意实数x成立. 由上式得

$$f(x^2)=f((-x)^2)=(f(-x))^2,$$

因此$f(x)$是偶函数或奇函数. 且由(5)式知，$f(x)$是奇函数(为什么?). 由(6)式知，当$x\geqslant 0$时$f(x)\geqslant 0$.

设存在x_1(不妨设$x_1>0$)使$x_2=f(x_1)\neq x_1$. 显然$x_2>0$，不妨设$x_1>x_2$. 在(*)式中令$x=\sqrt{x_1}$，$y=-x_1$得(利用(6)式及$f(x)$是奇函数)

$$f(x_1-x_2)=-x_1+x_2<0$$

矛盾. 因此

$$f(x)=x.$$

第3题解答 首先，把问题提得更为一般些，这可以使我们对问题的理解更深入，且易于找到解答。设给定空间中 s 个点，$s\geqslant 4$，其中任意四点都不共面。我们在每一对点之间都连一线段，把这样构成的图形称为 s 个点的完全图。容易算出，这样的完全图有 $s(s-1)/2$ 条线段。要求最小的值 $n=n(s)$，使得在这完全图中任意取出 $n(s)$ 条线段，并对其每一条线段任意地染上红色或蓝色后，必然会有同色的三线段构成一个三角形（简称为同色三角形）。

当 $s=4,5$ 时，值 $n(4),n(5)$ 不存在。因为图1，图2表明：可以对四个点的完全图及五个点的完全图的全部线段适当地染色①，而不出现同色三角形。

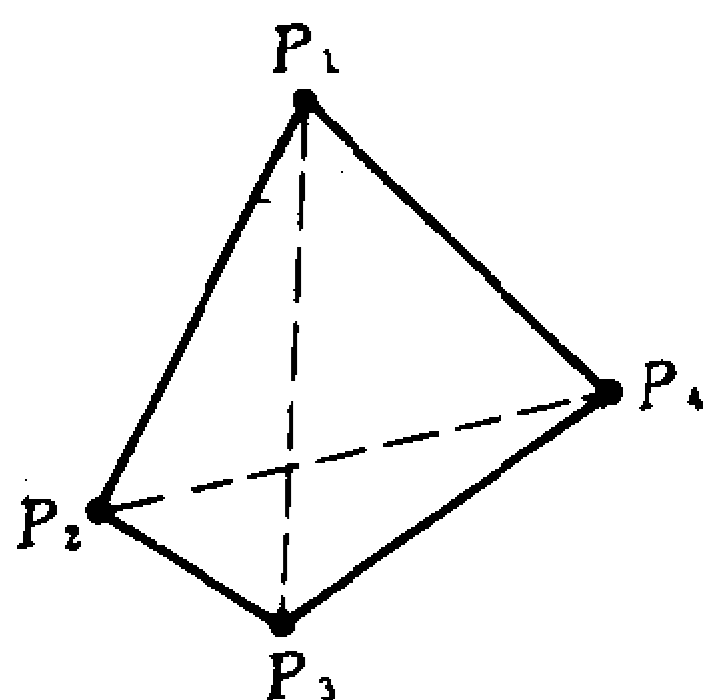


图 1

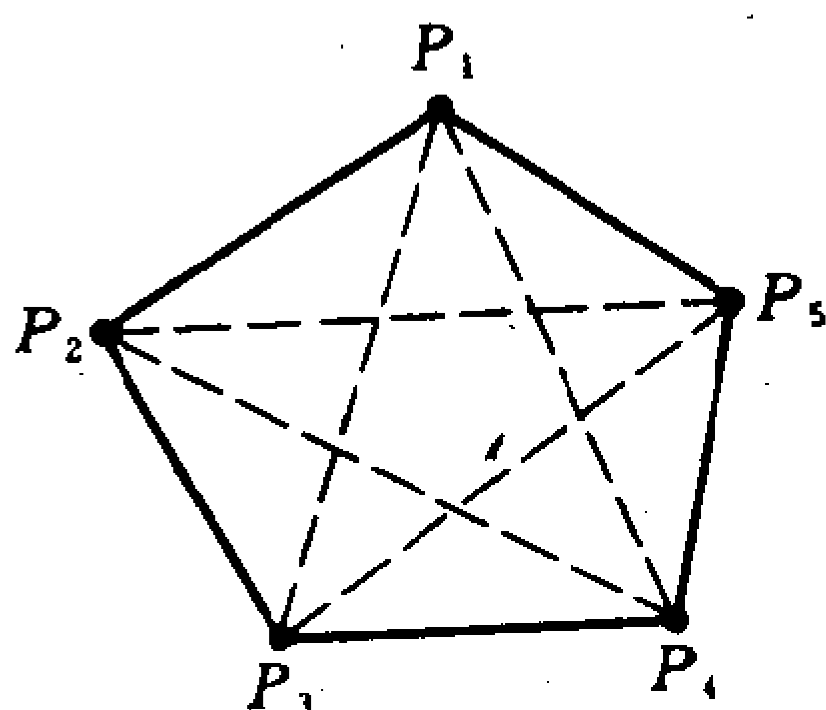


图 2

当 $s=6$ 时，这时的完全图有15条线段。图3表明可对其中14条线段适当地染色，而不出现同色三角形。下面来证明：当对全部15条线段任意地染色时必会出现一个同色三角形，即 $n(6)=15$。设这六个点为 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6，并已对它们构成的完全图的全部线段染了色。先来考虑由 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 五个点构成的完全图。如果在给出的染色下，已有

① 我们所说的“染色”均指对所考虑的线段，每一条染以红色或蓝色。图1—6中实线表示染红色，虚线表示染蓝色。

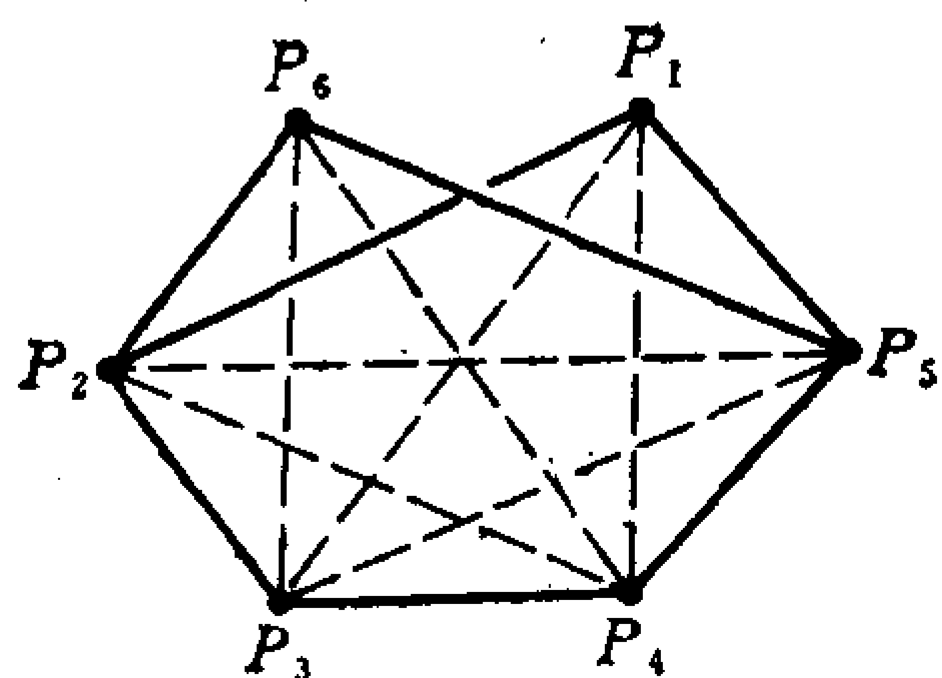


图 3　P_1P_6不染色

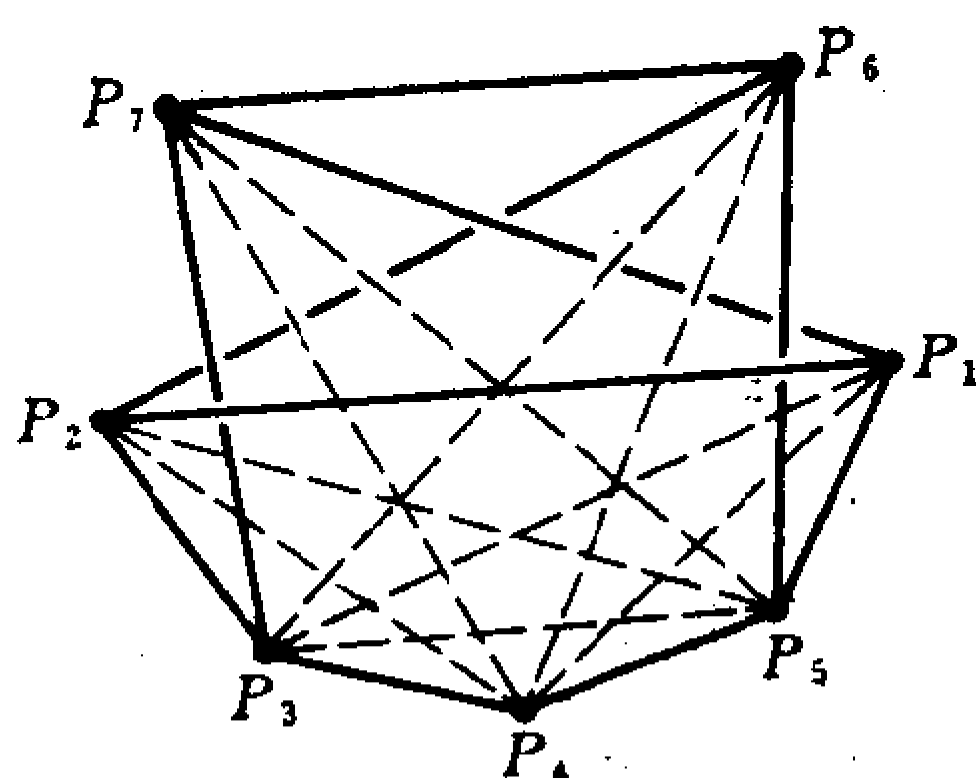


图 4　P_1P_6，P_2P_7不染色

同色三角形出现在这五个点的完全图中，则结论已经证明．所以，可假定在给出的染色下，这五个点的完全图中没有同色三角形．我们来考虑 $P_6P_1, P_6P_2, P_6P_3, P_6P_4, P_6P_5$ 这五条线段被染色的情况．由于只染红或蓝两色，所以在这五条线段中必有三条线段被染上了相同颜色．不妨设 P_6P_1, P_6P_2, P_6P_3 都被染了红色．由于$\triangle P_1P_2P_3$ 不是同色三角形，所以 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1这三线段中必有被染为红色的，不妨设P_1P_2被染为红色．因此$\triangle P_6P_1P_2$的三线段均被染了红色，为一同色三角形．这就证明了我们的结论①．

当 $s=7$时，完全图共有21条线段．图 4 给出了可选出其中19条线段适当地染色而不出现同色三角形的例子．我们来证明：如果任取20条线段来任意地染色，则一定出现同色三角形．设这七点为 $P_1, \cdots, P_7$．不妨设未染色的一条线段为 P_1P_7．显见，由 $P_1, \cdots, P_6$这六个点构成的完全图中的全部线段均被染色，上面已经证明其中必有同色三角形．因此，$n(7)=20$．

① 事实上可以证明：六个点的完全图被染色后，必有两个同色三角形．请读者试证．

当$s=8$时，完全图有28条线段。图5给出了可选出其中25条线段适当地染色而无同色三角形的例子。我们来证明：如果任取26条线段来任意地染色，则一定出现同色三角形。设这八点为$P_1,\cdots,P_8$。不妨设未染色的线段中有P_1P_8。容易看出：由$P_1,P_2,\cdots,P_7$这七个点构成的完全图中至少有20条线段被染色，上面已经证明了其中必有同色三角形。这就证明了要证的结论，即$n(8)=26$。

当$s=9$时，完全图有36条线段。图6给出了可选出其中32条线段适当地染色而无同色三角形的例子。我们来证明：如果任取33条线段来任意地染色，则一定出现同色三角形。设这九点为$P_1,\cdots,P_9$。不妨设未染色的线段中有P_1P_9.容易看出：由$P_1,P_2,\cdots,P_8$这八个点构成的完全图中至少有26条线段被染色，由前证可知其中必有同色三角形，即$n(9)=33$。

在图1到图6中，实线表示染红色，虚线表示染蓝色，不连线表示不染色。由于任意四点不共面，所以除了给定的点外，这些线段无其他交点。请读者自己思考画这些图的规律，画出满足条件的不同图形，并作进一步的探讨。

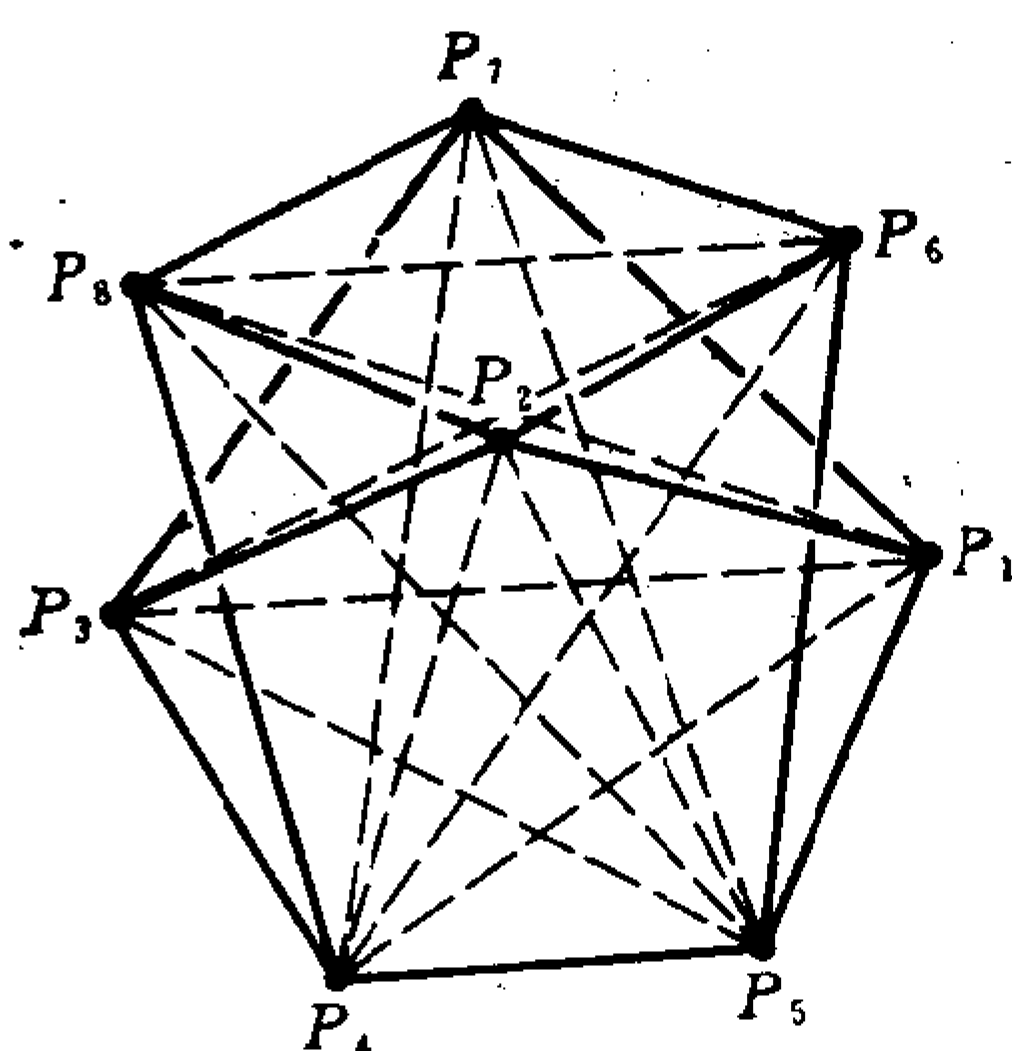


图5　P_1P_6,P_2P_7,P_3P_8不染色

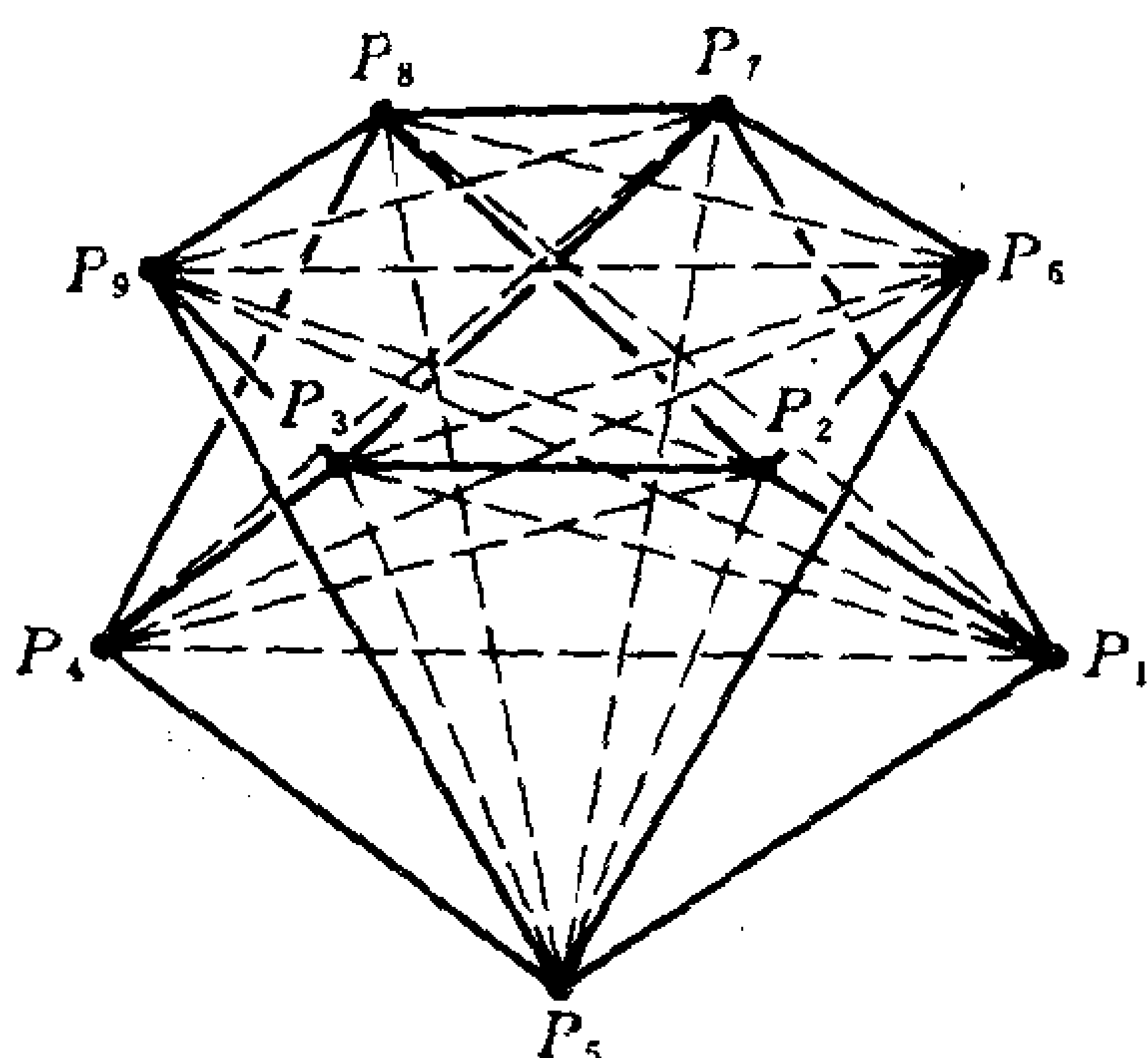


图 6　$P_1P_6, P_2P_7, P_3P_8, P_4P_9$不染色

第4题解答　建立如下的直角坐标系：取直线 l 为 x 轴，点 M 为坐标原点 O，以及圆周 Γ 在 x 轴的上方，切点为 $T(t, 0)$。切点 T 和 M 的相对位置可能有三种情形：$t>0$，$t=0$，$t<0$，参见图7，图8，图9。设圆周 Γ 的圆心为 $A(t,1)$（取圆周 Γ 的半径为坐标系的长度单位）。这样，所讨论的问题就变为：在 x 轴上取所有可能的这样的一对点 $R(s,0)$，$Q(-s, 0)$，$(s>0)$，使得过它们所作的 Γ 的不同于 x 轴的切线必相交，设交点为 P，且使 Γ 为 $\triangle PQR$ 的内切圆。求点 P 的轨迹。

设 Q^*，R^*是圆周 Γ 的平行于 MA（即 OA）的两条切线与 x 轴的两交点。显见 Q^*，R^* 分别位于 M 的两侧，且线段 Q^*M，MR^*的长度相等。设 Q^*，R^*的坐标分别为$(-s^*,0)$，$(s^*,0)$，$s^*>0$，容易看出，为使$\triangle PQR$是 Γ 的外切三角形，必须有 $s>s^*$，且当 $s\to+\infty$时点 P 趋向于点 $B(t,2)$。我们来证明：点 P 的轨迹是从 B 点出发（不含 B 点）平行于 MA 且和 Γ 不交的射线（在图 7，图 8，图 9 中均用粗线画出）。记点 P 的坐标为 (x,y)，由于 P 点的纵坐标必大于 B 点的纵坐

标，所以$y>2$。

设$\angle PRQ=\alpha$，$\angle PQR=\beta$。显见（参见图7）

$$\operatorname{ctg}\alpha/2=s-t,\qquad \operatorname{ctg}\beta/2=s+t;$$

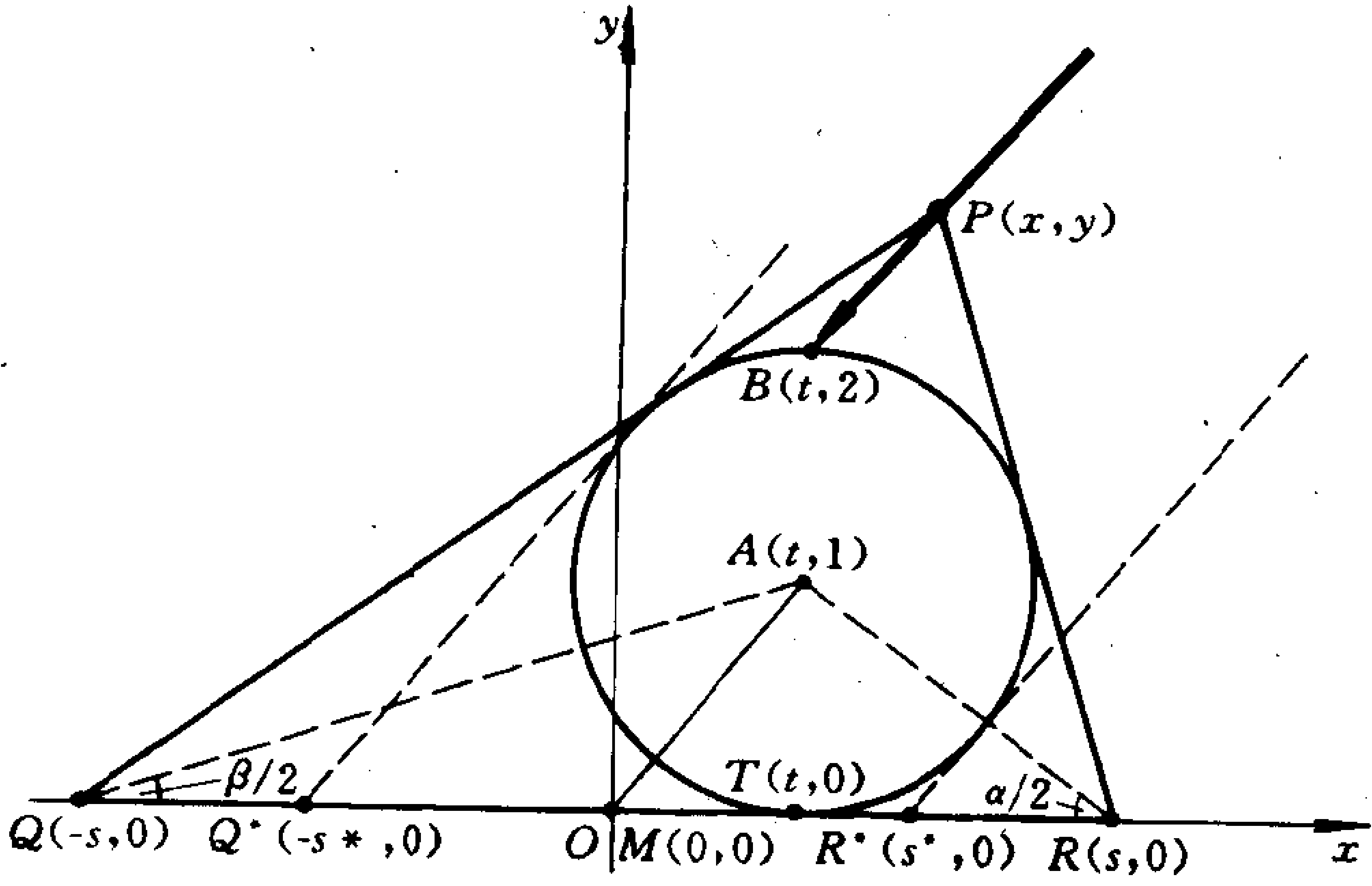


图 7

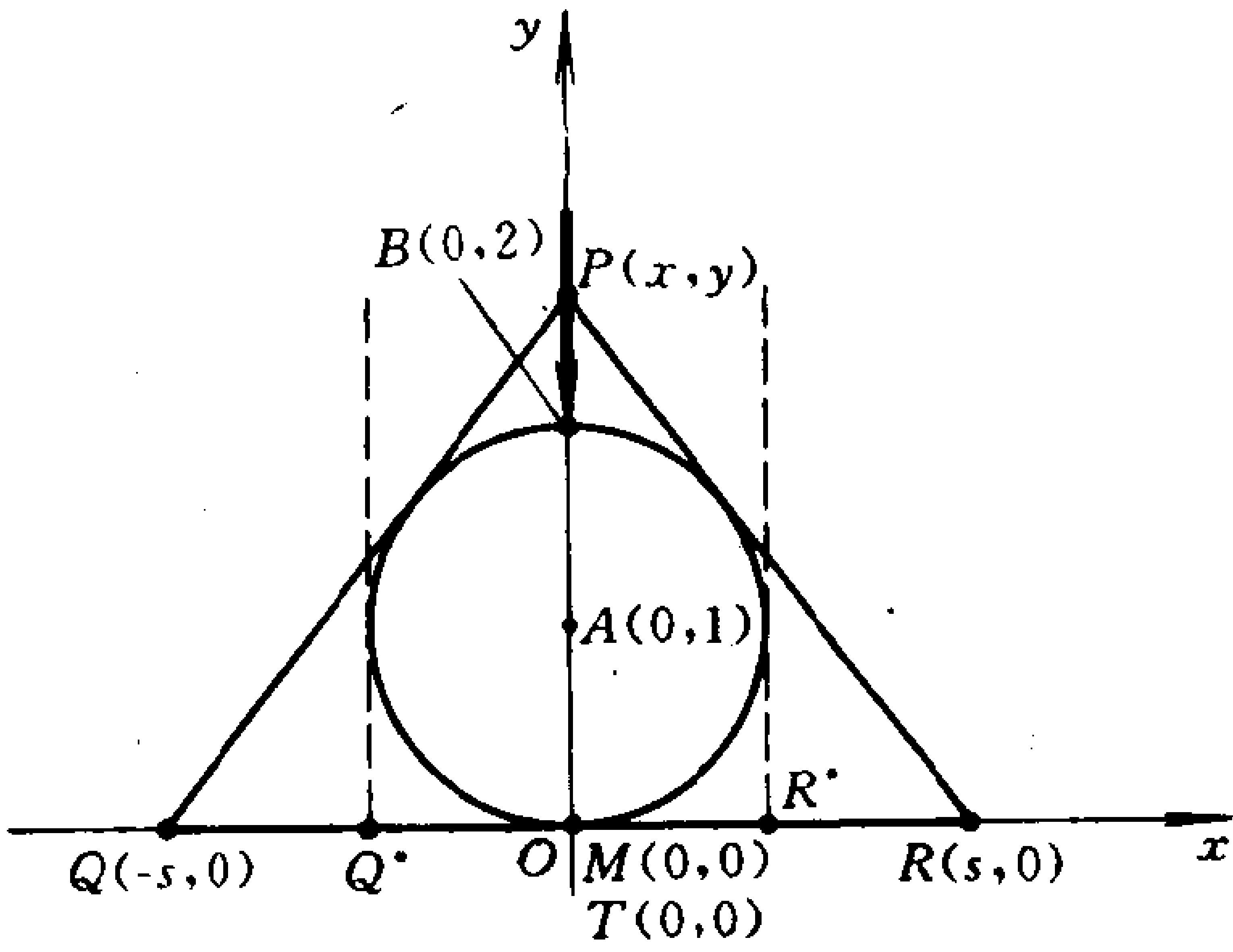


图 8

$$\operatorname{ctg}\alpha=(s-x)/y,\quad \operatorname{ctg}\beta=(s+x)/y.$$

利用关系式

图 9

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-1\Big/\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)\right),$$

就可推出

$$\frac{s-x}{y}=\frac{1}{2}\left(s-t-\frac{1}{s-t}\right),$$

$$\frac{s+x}{y}=\frac{1}{2}\left(s+t-\frac{1}{s+t}\right).$$

由此可得（注意 $s>0$）

$$\frac{2x}{y}=t\left(1+\frac{1}{s^2-t^2}\right),\qquad y>2,$$

$$\frac{2}{y}=1-\frac{1}{s^2-t^2},\qquad y>2.$$

进而有

$$x=t(y-1),\quad y>2,$$

即

$$\frac{x-t}{t}=\frac{y-2}{1},\ y>2.$$

这就证明了所要的结论。

第5题解答 因为S是有限集，所以可作K个平行于Oyz的平面，使得S的所有点都在这K个平面上，且每个平面上均有S中的点。这样，在第i个平面上可作a_i条直线垂直于Oxy平面，使在这第i个平面上的S中的点都在这些直线上，且每条直线上均有S中的点，在这a_i条直线的每一条上所有的S中的点的个数分别记为$c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{ia_i}$。显见，$a_i>0$，且有

$$|S|=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij}=\sum_{i=1}^{K}\sqrt{a_i}\frac{1}{\sqrt{a_i}}\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij}.$$

利用熟知的不等式，即得

$$|S|^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{K}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij}\right)^2\right).$$

容易看出，

$$S_z=\sum_{i=1}^{K}a_i,$$

$$S_y\geqslant\sum_{i=1}^{K}\max_{1\leqslant j\leqslant a_i}(c_{ij})\geqslant\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{a_i}\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij},$$

以及

$$S_x\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant K}\left(\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij}\right)\geqslant\sum_{j=1}^{a_i}c_{ij},\ 1\leqslant i\leqslant K.$$

由以上四式立即推出所需要的结论。

第6题解答 对每个正整数a，它当然能表为a个正整

数的平方和，即

$$a=\underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{a\text{个}}.$$

对$1\leqslant h<a$，a若可表为$a-h$个正整数的平方和，则一定是如下的形式：

$$a=\underbrace{1+\cdots+1}_{a-h-r\text{个}}+b_1^2+\cdots+b_r^2,$$

其中$b_j\geqslant 2$（$1\leqslant j\leqslant r$），$1\leqslant r\leqslant a-h$。因此，$a$可表为$a-h$个正整数的平方和的充要条件是$h$可表为：

$$h=(b_1^2-1)+\cdots+(b_r^2-1),\ b_j\geqslant 2,\ 1\leqslant j\leqslant r\leqslant a-h. \tag{1}$$

注意到$2^2-1=3$，$3^2-1=8$，利用上式可直接验证：a一定不可表为$a-1$个，$a-2$个，$a-4$个，$a-5$个，$a-7$个，$a-10$个，及$a-13$个正整数的平方和（请读者自己验证）。

由以上讨论知，当$a=n^2$（$n\geqslant 4$）时，n^2一定不能表为n^2-13个正整数的平方和，这就证明了$S(n)\leqslant n^2-14$，即结论(a)成立。

下面来证明(b)。注意到$2^2-1=3$，以及

$$14=(2^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1), \tag{2}$$

$$15=4^2-1, \tag{3}$$

$$16=(3^2-1)+(3^2-1), \tag{4}$$

容易看出，当$h\geqslant 14$时必可表为（为什么）

$$h=(b_1^2-1)+\cdots+(b_r^2-1),\ b_j\geqslant 2,\ 1\leqslant j\leqslant r. \tag{5}$$

但我们并不能立即断言必有$r\leqslant a-h$，特别当$a-h$较小时。因此，关键在于取一个特殊的$a=n^2$，使得n^2必可表为不多几个的正整数的平方和。下面来证明当$n=13$时结论(b)成

立①。容易直接验证：

$$13^2=12^2+5^2=12^2+4^2+3^2=11^2+4^2+4^2+4^2$$
$$=10^2+6^2+5^2+2^2+2^2$$
$$=10^2+6^2+4^2+3^2+2^2+2^2$$
$$=11^2+4^2+4^2+2^2+2^2+2^2+2^2$$
$$=10^2+6^2+5^2+2^2+1+1+1+1$$
$$=10^2+6^2+4^2+3^2+2^2+1+1+1+1$$
$$=11^2+4^2+4^2+2^2+2^2+2^2+1+1+1+1$$
$$=10^2+6^2+5^2+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$=10^2+6^2+4^2+3^2+1+1+1+1+1+1+1+1$$
$$=11^2+4^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+2^2+1+1+1+1$$
$$=10^2+6^2+4^2+2^2+2^2+1+1+1+1+1+1+1+1+1.$$

因此，还要证明，当$14\leqslant h\leqslant 154$时，$13^2$可表为$13^2-h$个正整数的平方和。由式(1)($a=13^2$)知，这只要证明：当$14\leqslant h\leqslant 154$时，必有

$$h=(b_1^2-1)+\cdots+(b_r^2-1),\quad b_j\geqslant 2,\quad 1\leqslant j\leqslant r\leqslant 13^2-h. \tag{6}$$

这可以直接对h分段验证。我们有

$$14\leqslant h-(11^2-1)\leqslant 34,\qquad 134\leqslant h\leqslant 154,$$
$$14\leqslant h-(10^2-1)\leqslant 34,\qquad 113\leqslant h\leqslant 133,$$
$$14\leqslant h-(9^2-1)\leqslant 32,\qquad 94\leqslant h\leqslant 112,$$
$$14\leqslant h-(8^2-1)\leqslant 30,\qquad 77\leqslant h\leqslant 93.$$

利用式(2),(3),(4)，$2^2-1=3$，$3^2-1=8$及$4^2-1=15$，从

① 注意：题中的k是这里的$a-h$，当$a=n^2$时，即n^2-h。

以上各式就可推出当$77 \leqslant h \leqslant 154$时，必有式(6)成立，且$r \leqslant 8$。而当$14 \leqslant h \leqslant 76$时，必有式(5)成立，且显然有$r < h \leqslant 13^2 - h$,即式(6)亦成立。这就证明了当$n = 13$时结论(b)成立。

最后，用归纳法来证明：当$n = 13^l$ ($l = 1, 2, \cdots$)时，结论(c)成立。当$l = 1$时，由(b)知结论成立。假设当$l = m (\geqslant 1)$时结论成立。当$l = m + 1$时，由

$$n^2 = (13^{m+1})^2 = 13^2 \cdot 13^{2m}$$

及归纳假设知，n^2可表为k个正整数平方和，只要

$$1 \leqslant k \leqslant 13^{2m} - 14.$$

这样，为了证明结论对$l = m + 1$成立，只要证明：当

$$13^{2m} - 14 < k \leqslant 13^{2m+2} - 14 \qquad (7)$$

时，13^{2m+2}一定能表为k个正整数平方之和。为此，我们利用等式

$$13^{2m+2} = \underbrace{13^2 + \cdots + 13^2}_{13^{2m} - 14 - 3\text{个}} + 13^2 \cdot 2^2 + 13^2 \cdot 2^2 + 13^2 \cdot 3^2.$$

由$l = 1$时结论成立，即每个13^2可表为$1 \sim 13^2 - 14$个正整数平方和，从上式即可推出：当

$$13^{2m} - 14 < k \leqslant (13^{2m} - 14)(13^2 - 14)$$
$$= 13^{2m+2} - 14(13^{2m} + 13^2) + 14^2$$

时，13^{2m+2}一定可表为k个正整数平方和。由此及式(7)知，我们只要证明：当

$$13^{2m+2} - 14(13^{2m} + 13^2) + 14^2 < k \leqslant 13^{2m+2} - 14 \qquad (8)$$

时，13^{2m+2}必可表为k个正整数平方和。显见，这里的k就是式(1)中的$13^{2m+2} - h$(取$a = 13^{2m+2}$)。因此，上式即

$$14 \leqslant h < 14(13^{2m} + 13^2) - 14^2. \qquad (9)$$

当h满足上式时，由式(5)及，

$$r < h < 28 \cdot 13^{2m} < 13^{2m+2} - h$$

知，必有式(1)成立(取$a=13^{2m+2}$)，即13^{2m+2}可表为$13^{2m+2}-h$(h满足式(9))个正整数平方和，亦即13^{2m+2}可表为k(k满足式(8))个正整数平方和．这就证明了当$l=m+1$时结论也成立。所以(c)成立。证毕。

（本题看来证明烦琐，但思路并不复杂，这就是弄清楚从式(1)到式(5)的内容．请读者仔细考虑。）

第34届国际数学奥林匹克

竞 赛 试 题

1．设整数 $n>1$，$f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$。证明：$f(x)$ 不能表为两个次数都不低于一次的整数系数的多项式的乘积。

2．设 D 是锐角三角形 ABC 内的一点，满足条件：(i) $\angle ADB=\angle ACB+90°$；(ii) $AC\cdot BD=AD\cdot BC$。

(a) 计算比值 $(AB\cdot CD)/(AC\cdot BD)$；

(b) 证明：三角形 ACD 的外接圆和三角形 BCD 的外接圆在 C 点的切线互相垂直。

3．在一个无限的方格棋盘上，有 n^2 个棋子放在一个由 $n\times n$ 个小方格组成的正方块中，每个小方格放一个棋子。按规则进行如下的游戏：每次必须这样移动一个棋子，先沿水平或垂直方向跳过相邻的一个必须放有棋子的小方格，然后，把这个棋子放在紧接着的下一个必须是空着的小方格中，并把被跳过的那个棋子拿走。试求所有的 n，使得这种游戏一定存在一种玩法，导致棋盘上最后只剩下一个棋子。

4．对于平面上的三个点 P,Q,R，以 $m(PQR)$ 表示三角形 PQR 的三条高长的最小值，当 P,Q,R 共线时，令 $m(PQR)=0$。设 A,B,C 是平面上给定的三点。证明：对平面上任意一点 X，必有

$$m(ABC)\leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)。$$

5．设 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 是全体正整数组成的集合．是否存在一个定义在集合 $\mathbf{N}$ 上的函数 $f(n)$ 具有以下性质：

(i) 对一切 $n\in\mathbf{N}$，$f(n)\in\mathbf{N}$；

(ii) 对一切 $n\in\mathbf{N}$，$f(n)<f(n+1)$；

(iii) $f(1)=2$；

(iv) 对一切 $n\in\mathbf{N}$，$f(f(n))=f(n)+n$。

6．设整数 $n>1$。有 n 盏灯 $L_0,L_1,\cdots,L_{n-1}$ 依次排列在一个圆周上，每盏灯可以有"开"或"关"两种状态。现依次进行一系列步骤：$S_0,S_1,\cdots,S_j,\cdots$，每个步骤 S_j 按以下规则来影响灯 L_j 的状态：若它的前一盏灯 L_{j-1} 是"关"，则 L_j 的状态不变；若灯 L_{j-1} 是"开"，则 L_j 改变状态，即从"开"变为"关"，或从"关"变为"开"。这里约定当 $h<0$ 或 $h\geqslant n$ 时，灯 L_h 就是灯 L_r，r 满足

$$h=qn+r,\quad 0\leqslant r<n.$$

现假设开始时全部灯都是开着的。证明：

(i) 一定存在正整数 $M(n)$，使得经过 $M(n)$ 个步骤 $S_0,S_1,\cdots,S_{M(n)-1}$ 后，全部灯也是开着的；

(ii) 若 $n=2^k$，则可取(i)中的 $M(n)=n^2-1$；

(iii) 若 $n=2^k+1$，则可取(i)中的 $M(n)=n^2-n+1$。

第34届国际数学奥林匹克竞赛试题解答

潘承彪

第34届国际数学奥林匹克竞赛于1993年7月18,19两天在土耳其伊斯坦布尔举行。我国选手取得了团体总分第一，六名选手全部获得金牌的好成绩。下面是试题解答。

第1题解答 用反证法。设$f(x)$可表为两个次数都不低于一次的整系数多项式的乘积：

$$f(x)=g(x)h(x), \quad (1)$$

$$g(x)=x^l+a_{l-1}x^{l-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$h(x)=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

其中$l\geqslant 1$，$m\geqslant 1$，a_i,b_i均为整数。

由$a_0b_0=3$知，不妨设$a_0=\pm 1$，$b_0=\pm 3$。显见$f(\pm 1)\neq 0$，$f(\pm 3)\neq 0$，所以必有$l\geqslant 2$，$m\geqslant 2$（为什么）。因此，$n\geqslant 4$。

下面来证明：若$0\leqslant k<n-2$，$b_0,\cdots,b_k$都是3的倍数，则b_{k+1}也是3的倍数。由于$f(x)$的x^{k+1}的系数为0，所以比较式(1)两边x^{k+1}的系数即得（当$j>l$时，$a_j=0$）：

$$b_0a_{k+1}+b_1a_k+\cdots+b_ka_1+b_{k+1}a_0=0,$$

由此及$a_0=\pm 1$，由条件知b_{k+1}也是3的倍数。

由于$b_0=\pm 3$，从以上所证结论立即推出必有$m-1$

$\geqslant n-2$(为什么)，即 $m\geqslant n-1$。但这和 $l+m=n, l\geqslant 2$ 矛盾。所以假设错误。证毕。

注 有的解法要用代数基本定理：n 次复系数多项式有 n 个根。虽很巧妙，但这里的解法较初等。下面介绍该解法的步骤。$g(x), h(x)$ 同上。(i) $l\geqslant 2$。(ii) 设 $a_1, \cdots, a_l$ 是 $g(x)$ 的 l 个根，$|a_1\cdots a_l|=1$。(iii) $g(-5)$ 必是 3 的因数。(iv) $|g(-5)|=|(5+a_1)\cdots(5+a_l)|=|(a_1\cdots a_l)^{n-1}(5+a_1)\cdots(5+a_l)|=3^l$，和(iii),(i)矛盾。

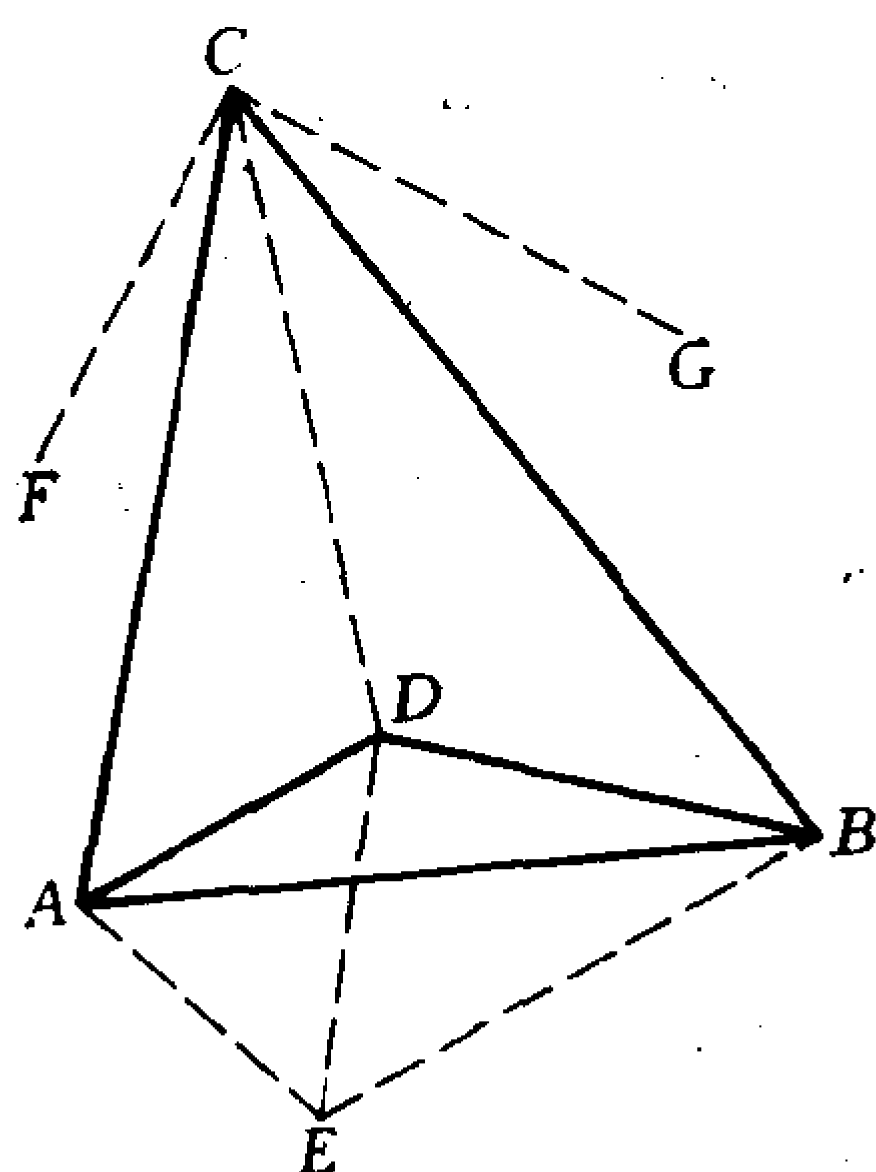


图 1

第 2 题解答 (a)如图作 $\angle ADE=\angle ACB$ 及 $\angle BAE=\angle CAD$。由此得 $\triangle ABC\backsim\triangle AED$ 及

$$BC:ED=AC:AD=AB:AE.$$

由第一等式及条件(ii)，(i)就推出，$DB=DE$，$\triangle BED$ 为等腰直角三角形，及 $BE=\sqrt{2}BD$。

由第二等式及所作的 $\angle BAE=\angle CAD$ 得 $\triangle ACD\backsim\triangle ABE$。因而有

$$AB:AC=BE:CD=(\sqrt{2}BD):CD.$$

因此所求的比值为 $\sqrt{2}$。

为证(b)，我们如图作直线 CF, CG 使得 $\angle FCD=\angle CBD$，$\angle GCD=\angle CAD$。由弦切角定理知 CF, CG 分别是 $\triangle BCD$，$\triangle ACD$ 的外接圆在 C 点的切线。因此，结论(b)就是要证明 $\angle FCD+\angle GCD=90°$。由所作的图及条件(i)，

我们有

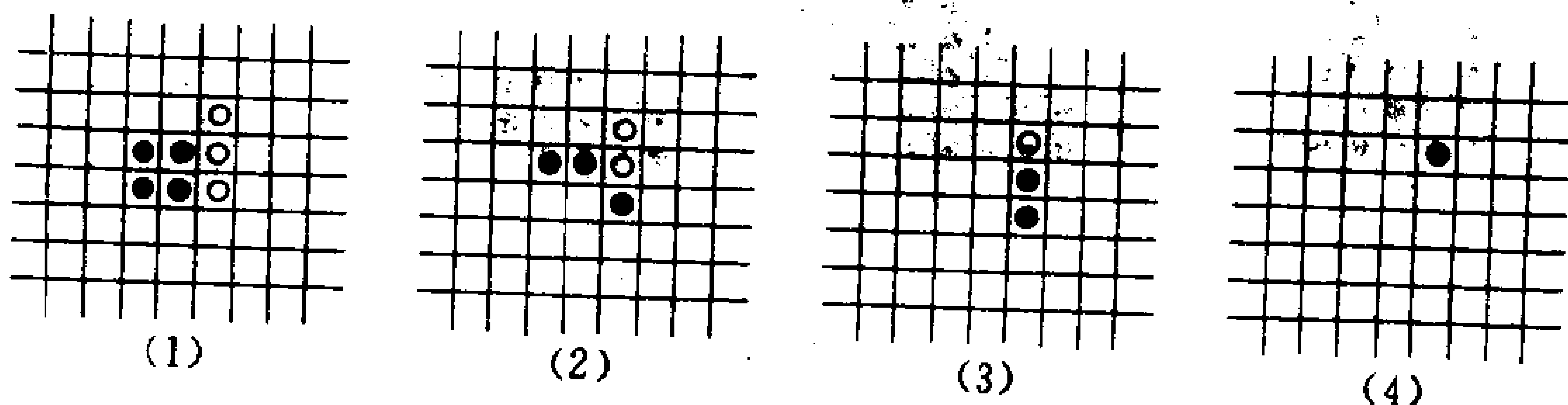
$$\begin{aligned}\angle FCD+\angle GCD&=\angle CBD+\angle CAD\\&=180^\circ-(\angle ACB+\angle DAB+\angle DBA)\\&=(180^\circ-\angle DAB-\angle DBA)-\angle ACB\\&=\angle ADB-\angle ACB=90^\circ.\end{aligned}$$

证毕。

第3题解答 先把这无限方格棋盘上的方格自左至右、自下而上标号：$s(i,j)$表第i行第j列处的小方格。假定所给的$n\times n$的方块由所有小方格$s(i,j)$，$1\leqslant i,j\leqslant n$组成。在以下各图中，画有“●”的小方格表示其中一定有一个棋子，画有“○”的小方格表示它一定是空的，不画的要么表示在移动过程中可确定其是否放有棋子，要么表示有无均可。

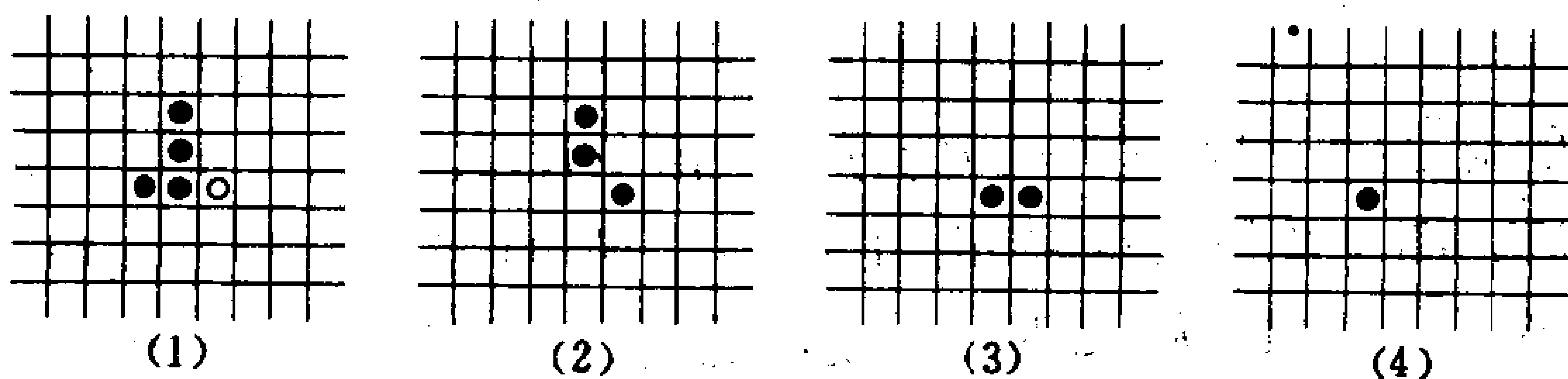
先来试验几个简单情形。$n=1$时显然成立。$n=2$时图2中(1)—(4)所示的玩法即满足要求。

若有四个棋子如图3中(1)所示，那么图3给出的走法



(1) (2) (3) (4)

图 2



(1) (2) (3) (4)

图 3

(1)—(4)，可使我们取走同一列中的三个棋子，而剩下的一个仍回到原来的位置。显见，在成T型的五个小方格（可依任意位置放在这棋盘上）中，放有保持这样相对位置的四个棋子时，均可有这样的走法。利用这样的方法，当$n>3$时，我们很容易把这放有n^2个棋子的$n\times n$正方块，在移动若干步后，变为放有$(n-3)^2$个棋子的$(n-3)\times(n-3)$的正方块。因为利用所说的走法，首先可依次把三个一组的小方格：$\{s(n,j),s(n-1,j),s(n-2,j)\}$取走，$j=1,2,\cdots,n-3$。其次

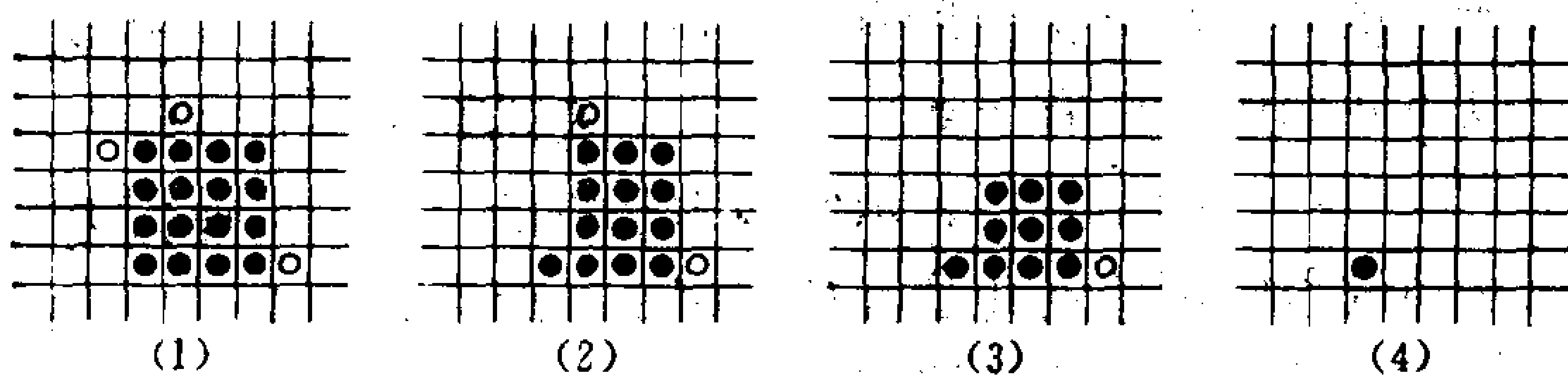


图4　$n=4$的情形

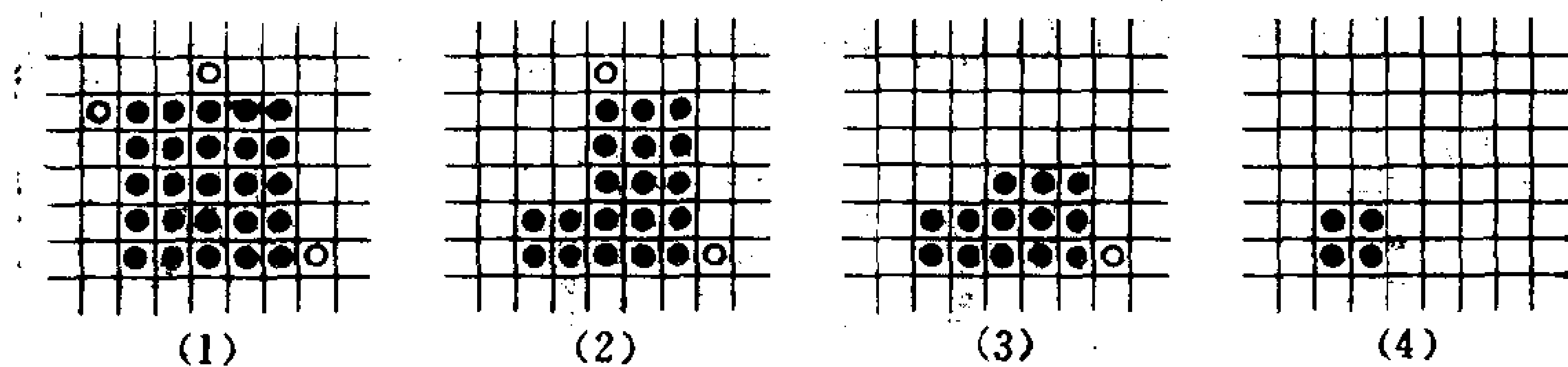


图5　$n=5$的情形

依次把三个一组的小方格：$\{s(j,n-2),s(j,n-1),\ s(j,n)\}$取走，$j=n,n-1,\cdots,4$。最后依次把三个一组的小方格：$\{s(1,j),s(2,j),s(3,j)\}$取走，$j=n,n-1,n-2$。这样，剩下的就是$(n-3)\times(n-3)$的方块，由$s(i,j)$，$1\leqslant i,j\leqslant n-3$，组成。图4及图5就给出了$n=4,5$时的走法。这就表明：当$n=3k+1,3k+2$时，一定可通过这样的走法，分别归结为$n=1,2$的情形。所以题目要求的玩法是存在的。

下面来证 $n=3k$ 时，这样的玩法一定不存在。证明的方法是对某种变化过程中存在的某种不变量的运用①．首先要指出的是：每移动一次棋子和且仅和水平或垂直的相联的三个小方格有关。如果把每个小方格 $s(i,j)$和数 $T(i,j)=i+j$ 相联系，那么对应于上述三个相联小方格的这样三个数被3除后的余数恰好分别为0,1,2。现把所有小方格 $s(i,j)$以其相对应的数 $T(i,j)$被3除后的余数（仅取 0,1,2）来分类，余数相同的属于一类。这样，全部小方格就被分为两两不相交的三类。当在棋盘上放有若干个棋子时，这些棋子也就相应地分为这样三类。如果我们按规定走一步棋子，那么前面的讨论表明：有两类中的棋子各减少 1 个，而另一类中的棋子增加 1 个。也就是说，这三类棋子的数目同时改变奇偶性。

当 $n=3k$，n^2 个棋子放在 $n\times n$ 的方块：$s(i,j)$，$1\leqslant i,j\leqslant n$ 中时，我们来计算每一类棋子的个数。容易算出使

$$T(i,j)=t,\qquad 2\leqslant t\leqslant n+1$$

的棋子有 $t-1$ 个；使

$$T(i,j)=t,\qquad n+2\leqslant t\leqslant 2n$$

的棋子有 $2n-(t-1)$个。因此当 $n=3k$ 时，相应余数为0的棋子个数有

$$\begin{aligned}&\{(3-1)+(6-1)+\cdots+(3k-1)\}+\{(6k-(3k+3-1))\\&\quad+(6k-(3k+6-1))+\cdots+(6k-(6k-1))\}\\&=\{2+5+\cdots+(3k-1)\}+\{(3k-2)\\&\quad+(3k-5)+\cdots+1\}\\&=3k^2;\end{aligned}$$

① 可参看本丛书第 3 册《乘电梯・翻硬币・游迷宫・下象棋》中“不能证明的命题”一文。

相应余数为 1 的棋子个数有

$$\{3+6+\cdots+3k\}+\{(6k-(3k+4-1))+(6k-(3k+7-1))$$
$$+\cdots+(6k-(6k-2-1))\}$$
$$=\{3+6+\cdots+3k\}+\{(3k-3)+(3k-6)+\cdots+3\}$$
$$=3k^2.$$

余下的就是相应余数为 2 的棋子，个数为$(3k)^2-3k^2-3k^2=3k^2$。因此，三类棋子个数相同，奇偶性也相同。因此，在$n=3k$的情形，每移动一次棋子后，在三类中，余下的棋子的数目的奇偶性仍都相同。因此，决不会出现只剩一个棋子——两类为 0，一类为 1 的情形。所以$n=3k$时，所要的玩法不存在。证毕。

第 4 题解答 以下$\triangle PQR$亦表其面积，并记$\triangle PQR$由顶点P所引的高为$h_P(PQR)$(P,Q,R共线时它等于零)。$m(ABC)=0$时结论显然成立。

如图 6，把$\triangle ABC$的三边双向延长后，全平面被分为$T_0,T_1,\cdots,T_6$七个区域（边界可重复计）（见图 6）。我们来证明点X位于任一区域时结论都成立。

(i) $X\in T_0$，即在$\triangle ABC$内（包括边界）。不妨设$\triangle ABC$最长的边是AB，所以$m(ABC)=h_C(ABC)$。此外显有（为什么）

$$XC,\ XB,\ XA\leqslant AB.$$

因此有

$$m(ABC)\cdot AB=\triangle ABC$$
$$=\triangle ABX+\triangle AXC+\triangle XBC$$
$$\leqslant m(ABX)\cdot AB+m(AXC)\cdot AB+m(XBC)\cdot AB,$$

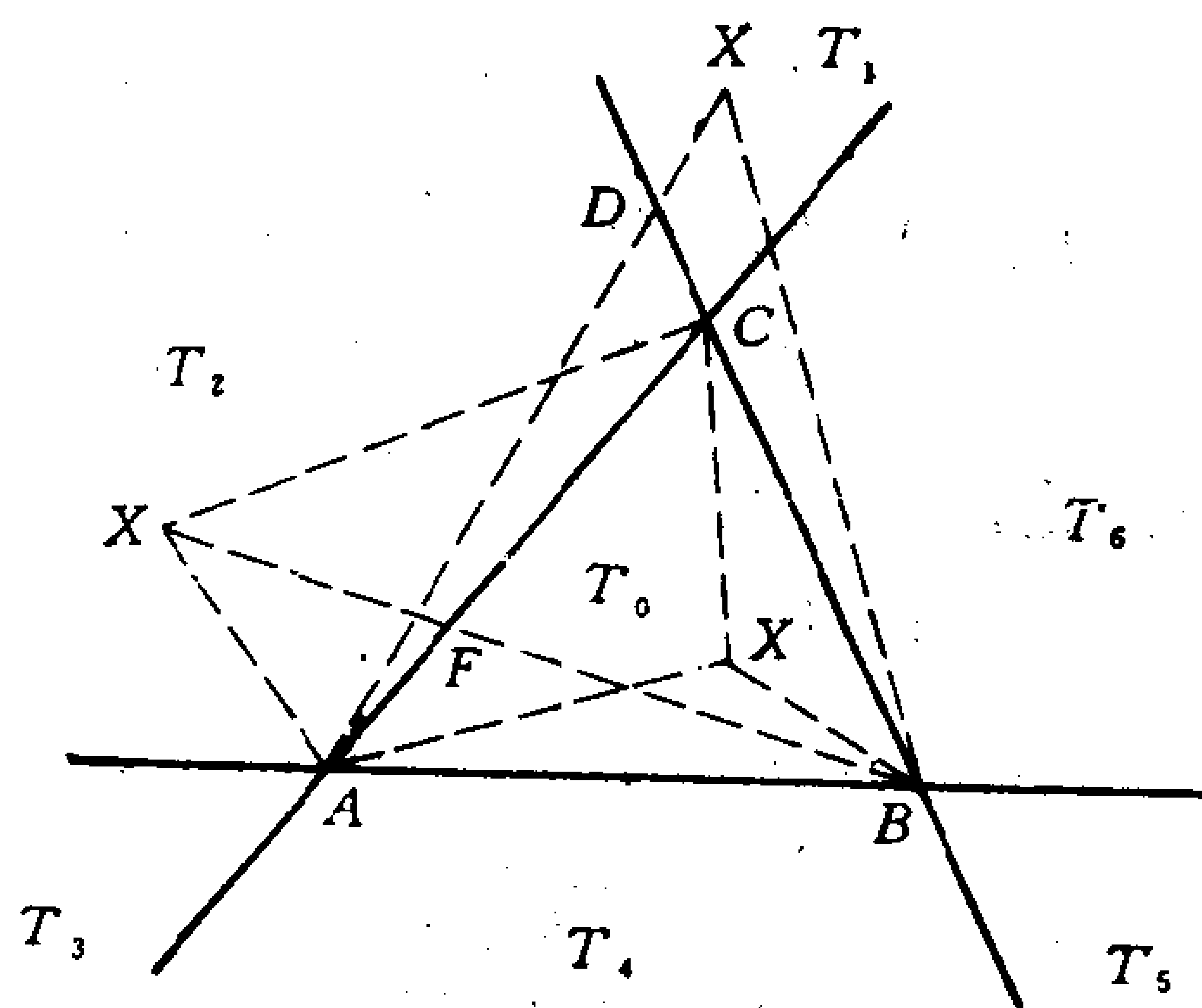


图 6

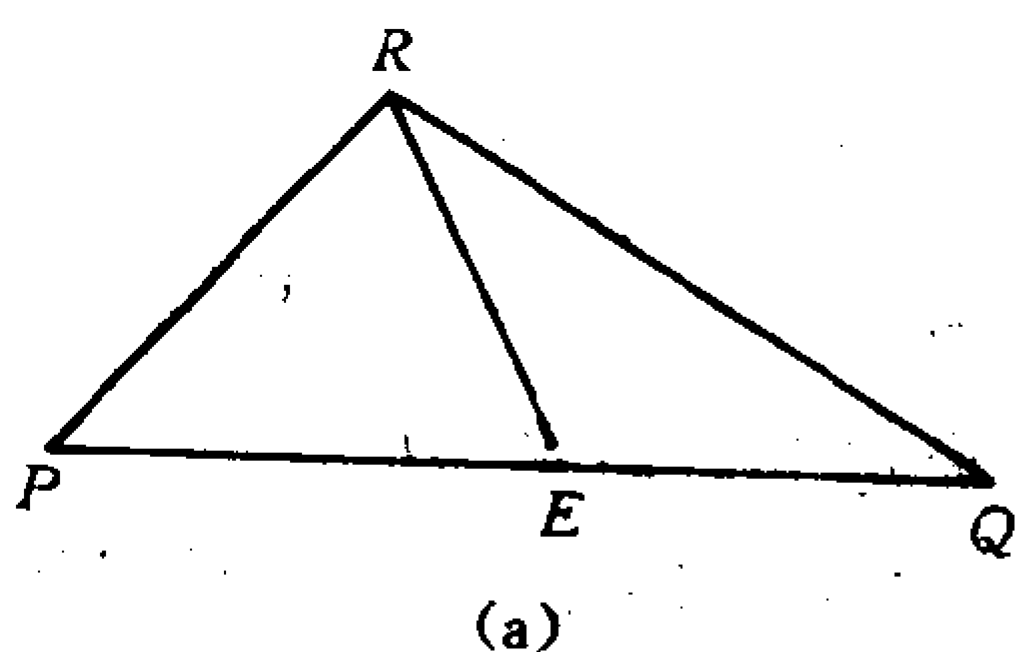
由此即得所要结论。

为证其它各个情形先证一个引理。如图 7 所示，点 E 在 $\triangle PQR$ 的边 PQ 上，我们有

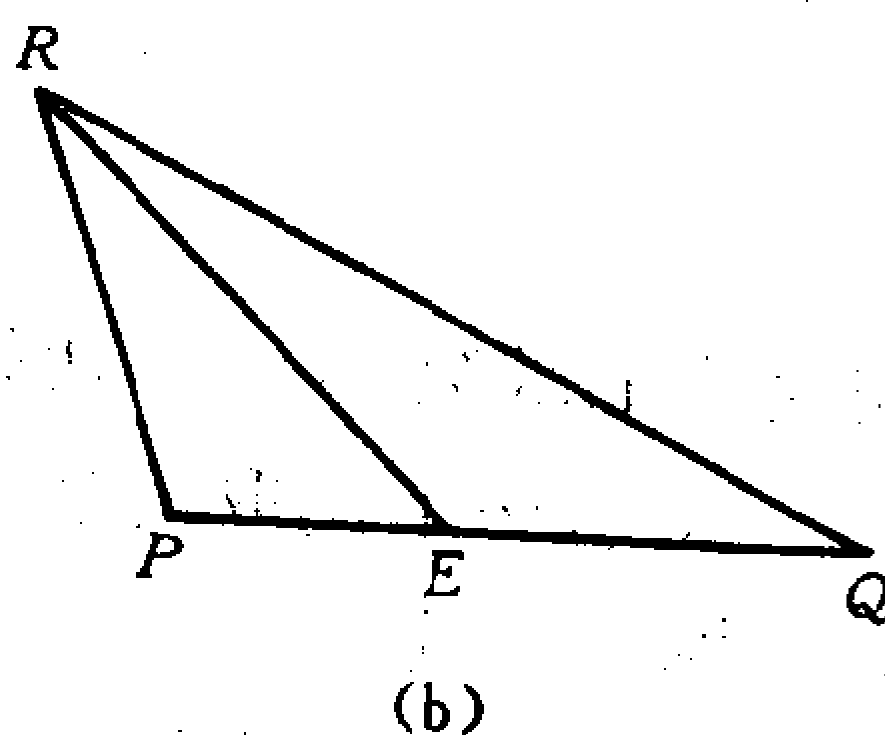
$$m(PQR)\geqslant m(PER),\quad m(PQR)\geqslant m(EQR).$$

若$\angle R$ 是$\triangle PQR$ 中最大的角（见图7(a)），则有

$$m(PQR)=h_R(PQR)=h_R(PER)=h_R(EQR),$$



(a)



(b)

图 7

由此即得所要结论。

若$\angle R$不是最大的角，不妨设$\angle P$为最大的角（见图7(b)），那么必有$\angle R<90°$，$\angle Q<90°$。因此有

$$m(PQR)=h_P(PQR)\geqslant h_P(PER),$$
$$h_P(PQR)\geqslant h_E(EQR).$$

这也推出所要结论。引理证毕。

(ii) $X\in T_1$。由引理知

$$m(ABC)\leqslant m(ABD)\leqslant m(ABX),$$

所以结论成立。$x\in T_3,T_5$同理证明。

(iii) $X\in T_2$。由引理及已证明的情形(i)得

$$m(ABC)\leqslant m(ABF)+m(BCF)$$
$$\leqslant m(ABX)+m(XBC),$$

所以结论成立。$x\in T_4,T_6$同理证明。证毕。

第5题解答 如果满足条件的函数$f(n)$存在，则由条件(iii)及(iv)确定了这样一个数列：

$$a_1=f(1)=2,\qquad a_2=f(a_1)=a_1+1=3,$$
$$a_3=f(a_2)=a_2+a_1=5,$$
$$a_j=f(a_{j-1})=a_{j-1}+a_{j-2},\qquad j\geqslant 3.$$

这表明这样的函数$f(n)$在初始项为$a_0=1$，$a_1=2$的Fibonaci数列$a_0,a_1,a_2,\cdots$上的取值是完全确定的。记数列$\{a_j\}=A_0$。这样，问题就变为当$n\in \mathrm{N}$，$n\notin A_0$时如何定义$f(n)$使其满足条件。我们用如下的归纳方式来定义。

设$f(n)$已在集合$A_j\supseteq A_0$上有定义，$A_j\neq \mathrm{N}$。设b_0是$f(n)$还没有定义的最小正整数，显见$b_0\geqslant 3$，且$n=b_0-1$时

已有定义．现定义

$$f(b_0)=f(b_0-1)+1=b_1,$$
$$f(b_j)=f(b_{j-1})+b_{j-1}=b_{j+1},\qquad j\geqslant 1.$$

这样就扩大了 $f(n)$ 的定义范围到集合 $A_{j+1}=A_j\cup\{b_i\}$．容易验证这样的定义是合理的，不矛盾的，且在 A_{j+1} 上满足全部条件．若 $A_{j+1}=\mathbb{N}$，则过程结束，不然就继续同样的过程．这样，最终在 $\mathbb{N}$ 上定义了一个满足条件的函数 $f(n)$．这一方法的缺点是不仅验证条件繁琐，而且 $f(n)$ 没有一个明确简便的表示式．

下面来介绍另一解法．

我们可以这样来分析：由条件(ii)，(iii)知

$$f(n)/n>1,\qquad n\geqslant 1.$$

进而由条件(iv)知，

$$1<f(f(n))/f(n)=1+(f(n)/n)^{-1}<2.$$

因此可猜测比值 $f(n)/n$ 当 n 趋于无穷大（或者 n 有一列特殊值趋于无穷大）时，应该有一极限值 α．显见，它应满足

$$\alpha=1+\alpha^{-1},\qquad \alpha\geqslant 1.$$

因此 $\alpha=(\sqrt{5}+1)/2$．进而，就可猜想 $f(n)$ 是应和 αn 较接近的整数．作为中学竞赛题一般 $f(n)$ 不应有太复杂的形式，可以设想先用 $f(n)=[\alpha n+\beta]$① 来试一下，其中 β 为一待定常数．显见，当

$$2-\alpha\leqslant\beta<3-\alpha\qquad(*)$$

时条件(i)，(ii)，(iii)均成立．下面用条件(iv)来确定 β．为此要计算

---

① $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．

$$I(n)=f(f(n))-f(n)-n.$$

我们有（利用 $\alpha^2-\alpha-1=0$）

$$\begin{aligned}I(n)&=[\alpha[\alpha n+\beta]+\beta]-[\alpha n+\beta]-n\\&=[\alpha[\alpha n+\beta]+\beta]-\alpha[\alpha n+\beta]\\&\quad+(\alpha-1)([\alpha n+\beta]-\alpha n).\end{aligned}$$

利用 $\beta-1<[x+\beta]-x\leqslant\beta$ 就有

$$\alpha(\beta-1)<I(n)<\beta\alpha,$$

右边不取等号是因为 α 是无理数，$\alpha n+\beta$ 与 $\alpha(\alpha n+\beta)+\beta$ 不能同时为整数（为什么）。因为 $I(n)$ 是整数，为使条件(iv)成立，即对所有 n，$I(n)=0$，只需 β 满足

$$1-\alpha^{-1}\leqslant\beta\leqslant\alpha^{-1}.$$

这时式(*)也一定成立。这样，任取一满足上式的 β，$f(n)=[\alpha n+\beta]$ 均满足全部条件。证毕。

这是求解一类函数方程的一种方法的特例。本题与第20届第3题完全类似，且要容易些。容易证明那道题中要求的函数满足：

$$f(f(n))=f(n)+n-1,\qquad f(1)=1,$$
$$g(n)=f(n)+n.$$

可以用这里的方法来解这题。但是，这两道题都不能算是好的竞赛题。因为知道这种方法的很易做出，不知道的就难以想到。

第 6 题解答 以 $L_i(j)$ 表示在施行步骤 S_j 之前灯 L_i 的状态，并约定

$$L_i(j)=\begin{cases}1, & L_i(j)\text{为开},\\0, & L_i(j)\text{为关}.\end{cases}$$

这样，n 元数组(仅取值0,1)

$$T_n(j)=T(j)=\{L_0(j),L_1(j),\cdots,L_{n-1}(j)\}$$

就表示施行步骤 S_j 之 前这 n 盏灯的状态．本题的条件就是

$$T(0)=\{1,1,\cdots,1\}.$$

现约定以下的运算(即模 2 的加法)：

$$0+0=0,\ 1+0=0+1=1,\ 1+1=0.$$

这样，施行步骤 S_j 后，这 n 盏灯的状态为

$$T(j+1)=\{L_0(j),\cdots,L_{j-1}(j),L_j(j)+L_{j-1}(j),\\ L_{j+1}(j),\cdots,L_{n-1}(j)\},$$

这里灯 L_j 见题中约定．容易看出

$$T(n)=\begin{cases}\{0,1,0,1,\cdots,0,1\}, & n\text{ 为偶},\\\{0,1,0,1,\cdots,0,1,0\}, & n\text{ 为奇}.\end{cases}$$

(i)的证明 (i) 就是要证明，对给定的$n>1$，一定存在正整数 $M=M(n)$使得

$$T(M)=\{1,1,\cdots,1\}.$$

由于对给定的n，n 元数组$T(j)$仅有有限种可能．所以，在无穷序列$T(0),T(1),T(2),\cdots$中一定会出现完全相同的两个 n 元数组，记为

$$T(M_1+K)=T(M_1),$$

其中$M_1\geqslant0$，$K>0$．此外，对任一$l\geqslant1$，$T(l)$不仅唯一确定$T(l+1)$及其以后各态，而且也唯一确定$T(l-1)$及其以前的各态．因此对任意的$j\geqslant0$必有

$$T(j+K)=T(j).$$

特别的 $T(K)=T(0)$，取 $M(n)=K$ 就证明了(i)。

下面用归纳法来证明(ii)和(iii)。

(ii)的证明 先考察几个具体例子。$k=1$，$n=2$ 时，

	$T(0)$	$T(2)$	$T(2^2-1)$
L_0	1	0	1
L_1	1	1	1

结论成立。当 $k=2$，$n=2^2$ 时

	$T(0)$	$T(2^2)$	$T(2\cdot 2^2)$	$T(3\cdot 2^2)$	$T(2^4-1)$
L_0	1	0	1	0	1
L_1	1	1	0	0	1
L_2	1	0	0	0	1
L_3	1	1	1	1	1

结论也成立。从观察以上实例，启发我们来归纳证明以下结论：对任意正整数k及$n=2^k$，必有

$$L_{n-1}(j)=1,\quad 0\leqslant j\leqslant(n-1)n, \tag{1}$$

$$L_{n-2}(j)=0,\quad n-1\leqslant j\leqslant(n-1)n, \tag{2}$$

以及

$$T_n((n-1)n)=\{0,0,\cdots,0,1\}. \tag{3}$$

显见，由上式立即推出 $T_n(n^2-1)=\{1,1,\cdots,1\}$，即证明了(ii)。下面用归纳法来证明这结论。

$k=1$时，由实例知结论成立。假设$k=m$，$n=2^m$时结论成立。当 $k=m+1$，$n=2^{m+1}$ 时，我们有

	$T_{2^{m+1}}(0)$	$T_{2^{m+1}}(2^{m+1})$
L_0	1	0
L_1	1	1
⋮	⋮	⋮
L_{2^m-2}	1	0
L_{2^m-1}	1	1
L_{2^m}	1	0
L_{2^m+1}	1	1
⋮	⋮	⋮
$L_{2^{m+1}-2}$	1	0
$L_{2^{m+1}-1}$	1	1

这里 $T_{2^{m+1}}(2^{m+1})$是直接由题目条件写出的。把这 2^{m+1} 盏灯，分为前面的2^m盏灯$L_0,\cdots,L_{2^m-1}$，及后面的2^m盏灯L_{2^m}，$\cdots,L_{2^{m+1}-1}$。此后，前2^m盏灯的变化仅和灯 $L_{2^{m+1}-1}$的状态直接有关，而后 2^m 盏灯的变化仅和灯 L_{2^m-1} 的状态直接有关。由于$L_{2^{m+1}-1}(2^{m+1})=L_{2^m-1}(2^{m+1})=1$，从归纳假设对 $k=m$ 成立可知，在

$$T_{2^{m+1}}(s\cdot 2^{m+1}),\quad 1\leqslant s\leqslant 2^m-1$$

各态中，前面与后面的2^m 盏灯的状态都分别同只有 2^m 盏灯的情形，在

$$T_{2^m}(s\cdot 2^m),\quad 1\leqslant s\leqslant 2^m-1$$

各态中的状态相同。因此有(取$s=2^m-1$)

	$T_{2^{m+1}}((2^m-1)2^{m+1})$	$T_{2^{m+1}}(2^m \cdot 2^{m+1})$
L_0	0	1
L_1	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L_{2^m-2}	0	1
L_{2^m-1}	1	0
L_{2^m}	0	0
L_{2^m+1}	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L_{2^{m+1}-2}$	0	0
$L_{2^{m+1}-1}$	1	1

再由此及归纳假设(特别是式(2))成立，就推出 $L_0, L_1, \cdots, L_{2^m-2}, L_{2^{m+1}-1}$ 这 2^m 盏灯在$T_{2^{m+1}}(s \cdot 2^{m+1})$，$2^m \leqslant s \leqslant 2^{m+1}-1$各态中的状态同只有 2^m 盏灯的情形在

$$T_{2^m}((s-2^m)2^m), \quad 2^m \leqslant s \leqslant 2^{m+1}-1$$

各态中的状态相同。特别当$s=2^{m+1}-1$时有

	$T_{2^{m+1}}((2^{m+1}-1)2^{m+1})$
L_0	0
L_1	0
$\vdots$	$\vdots$
L_{2^m-2}	0
L_{2^m-1}	0
L_{2^m}	0
L_{2^m+1}	0
$\vdots$	$\vdots$
$L_{2^{m+1}-2}$	0
$L_{2^{m+1}-1}$	1

这就证明了当 $k=m+1$ 时结论也成立。(ii)证毕。

(iii)的证明 同样先考察几个实例。$k=1$，$n=3$时，我们有

	$T(0)$	$T(3)$	$T(2\cdot3)$	$T(2\cdot3+1)$
L_0	1	0	0	1
L_1	1	1	1	1
L_2	1	0	1	1

结论成立。$k=2$，$n=5$时，我们有

	$T(0)$	$T(5)$	$T(2\cdot5)$	$T(3\cdot5)$	$T(4\cdot5)$	$T(4\cdot5+1)$
L_0	1	0	0	0	0	1
L_1	1	1	1	1	1	1
L_2	1	0	1	0	1	1
L_3	1	1	0	0	1	1
L_4	1	0	0	0	1	1

结论也成立。由此启发我们来归纳证明以下结论：对任意正整数k及$n=2^k+1$，必有

$$L_0(j)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant(n-2)n, \tag{4}$$

$$L_{n-2}(j)=0,\quad 2n-1\leqslant j\leqslant(n-2)n, \tag{5}$$

$$L_{n-1}(j)=0,\quad n\leqslant j\leqslant(n-2)n, \tag{6}$$

及

$$T_n((n-2)n)=\{0,1,0,\cdots,0\}. \tag{7}$$

显见，由式(7)立即推得

$$T_n((n-1)n)=\{0,1,1,\cdots,1\},$$

$$T_n((n-1)n+1)=\{1,1,1,\cdots,1\},$$

即(iii)成立。下面由归纳法来证明这结论。

由实例知$k=1,2$时结论成立。假设结论当$k=m(\geqslant 2)$时成立。当$k=m+1$，$n=2^{m+1}+1$时，有

	$T_{2^{m+1}+1}(0)$	$T_{2^{m+1}+1}(2^{m+1}+1)$
L_0	1	0
L_1	1	1
⋮	⋮	⋮
L_{2^m-2}	1	0
L_{2^m-1}	1	1
L_{2^m}	1	0
L_{2^m+1}	1	1
⋮	⋮	⋮
$L_{2^{m+1}-2}$	1	0
$L_{2^{m+1}-1}$	1	1
$L_{2^{m+1}}$	1	0

把这$2^{m+1}+1$盏灯分为前面$L_0,L_1,\cdots,L_{2^m}$及后面$L_{2^m},L_{2^m+1},\cdots,L_{2^{m+1}}$各$2^m+1$盏灯，其中灯$L_{2^m}$重复出现。由此可看出，**此后的变化**，前面的$2^m+1$盏灯与灯$L_{2^{m+1}}$的状态直接相关，而后面的$2^m+1$盏灯与灯$L_{2^m-1}$的状态直接相关(要注意的是后面的$2^m+1$盏灯实际上与状态$L_{2^m-1}(j)$有关，$j\geqslant 2^{m+1}+2^m+1$)。由此及归纳假设对$k=m$时成立，特别是式(5)成立(注意$m\geqslant 2$，$j$的变化范围非空)，就推出在

$$T_{2^{m+1}+1}(s\cdot(2^{m+1}+1)),\ 1\leqslant s\leqslant(2^m+1)-2$$

各态中，这前后各2^m+1盏灯的状态都分别同只有2^m+1盏灯的情形，在

$$T_{2^m+1}(s(2^m+1)),\ 1\leqslant s\leqslant(2^m+1)-2$$

各态中的状态相同。因此有(取$s=2^m-1, p=2^{m+1}+1$)

	$T_{2^{m+1}+1}(s\cdot p)$	$T_{2^{m+1}+1}(2^m\cdot p)$	$T_{2^{m+1}+1}((2^m+1)p)$
L_0	0	0	0
L_1	1	1	1
L_2	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮
L_{2^m-1}	0	1	1
L_{2^m}	0	1	0
L_{2^m+1}	1	0	0
L_{2^m+2}	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮
$L_{2^{m+1}}$	0	0	0

再利用归纳假设可知：前 2^m+1 盏灯 $L_0, L_1, \cdots, L_{2^m}$ 在

$$T_{2^{m+1}+1}(s(2^{m+1}+1)),\quad 2^m+1\leqslant s\leqslant 2^{m+1}-1$$

中的状态同只有2^m+1盏灯在

$$T_{2^m}((s-2^m)(2^m+1)),\ 2^m+1\leqslant s\leqslant 2^{m+1}-1$$

中的状态一样。此外后面的2^m盏灯总是关的，即取值 0 。因此有(取$s=2^{m+1}-1$)

	L_0	L_1	L_2	$\cdots$	$L_{2^{m+1}}$
$T_{2^{m+1}+1}((2^{m+1}-1)(2^{m+1}+1))$	0	1	0	$\cdots$	0，

即当 $k=m+1$ 时 式(7)成立，综合以上讨论知式(4)—(7)当 $k=m+1$ 时全成立。证毕。

初等数学问题(3)解答

1. 解　设正方形$ABCD$的边长为$x$km，仓库位置在P点，如图1. 仓库到最近的马路的距离可以认为是图中4个三角形(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ)的最小垂线长. 将余弦定理应用到三角形Ⅰ和Ⅱ，可以得到下式：

$$25 = 64 + x^2 - 16x\cos\gamma, \tag{1}$$

$$169 = 64 + x^2 - 16x\cos\delta. \tag{2}$$

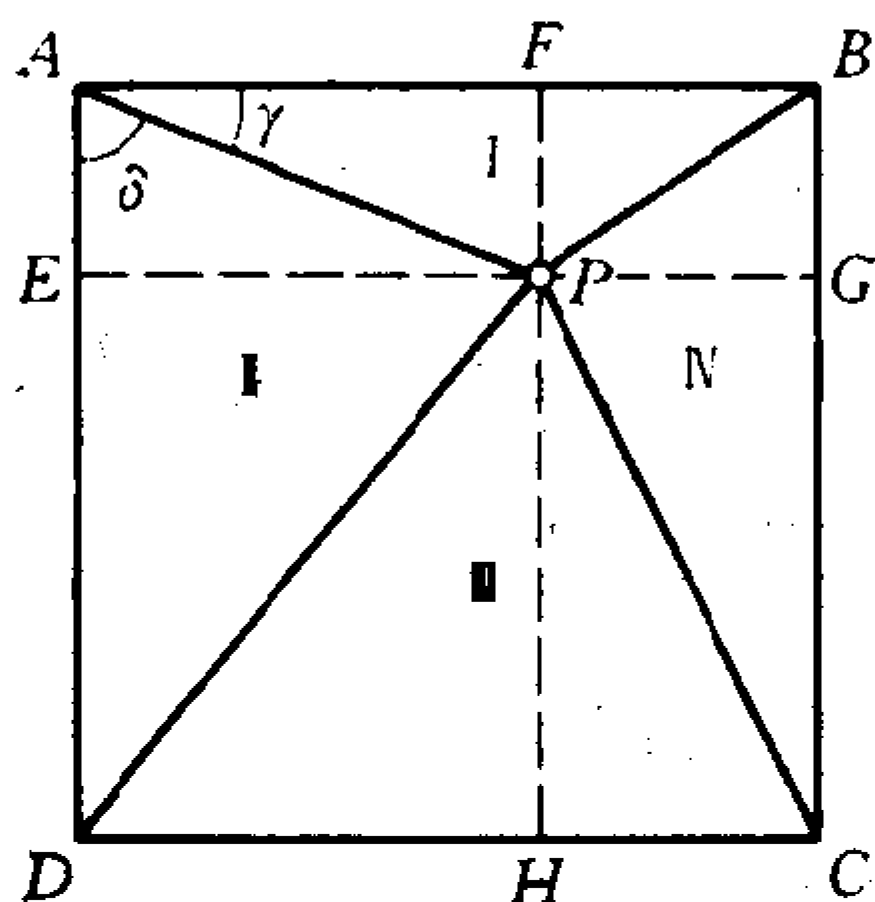


图　1

因为$\gamma + \delta = 90°$，所以有

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + 39}{16x}, \tag{3}$$

$$\sin\gamma = \cos\delta = \frac{x^2 - 105}{16x}. \tag{4}$$

由$\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$，得下列方程：

$$x^4-194x^2+6273=0.$$

解此双二次方程，可得$x^2=153$或$x^2=41$，其中 $x^2=41$ 使得$\sin\gamma<0$，故舍去，所以

$$x=\sqrt{153}\doteq 12.37.$$

将上式代入(3)或(4)知：$\gamma\doteq 14°2'$，$\delta\doteq 75°58'$. 这样可以依次得到仓库到各条马路的距离为：

$$PF=8\cdot\sin\gamma\doteq 1.94,\qquad PE=8\cdot\sin\delta\doteq 7.76,$$
$$PG=x-PE\doteq 4.61,\qquad PH=x-PF\doteq 10.43.$$

故所求仓库到马路的最近距离为1.94km。

2. 证明　如图2，在$\triangle ABC$中，垂线AD,BE,CF交于垂心H。直角三角形ABE和直角三角形ACF有一个公共锐角$\angle A$。所以$\angle ABE=\angle ACF$。因为点F,B,D,H与E,H,D,C

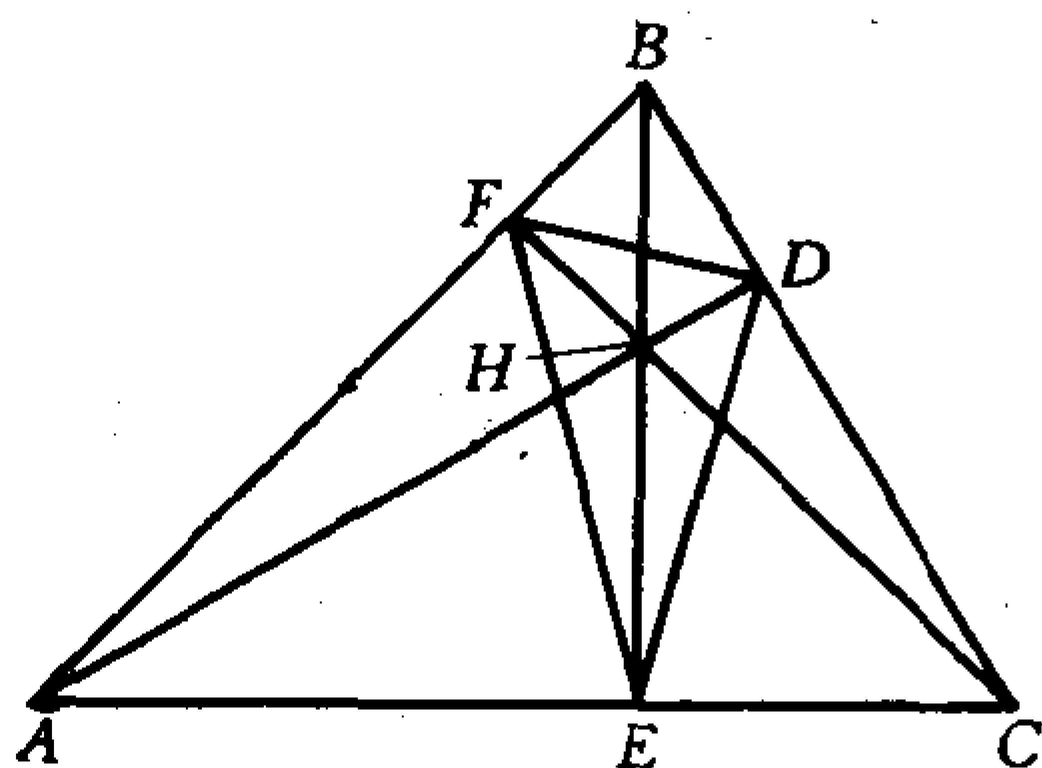


图　2

分别四点共圆，所以

$$\angle FBH=\angle FDH,\qquad \angle HDE=\angle HCE,$$
$$\angle FOH=\angle FBH=\angle ABE=\angle ACF=\angle HCE=\angle HDE,$$

即AD平分$\angle FDE$。

同理可证，BE和CF分别平分$\angle FED$和$\angle EFD$. 所以$\triangle ABC$三条高是$\triangle DEF$的三条内角平分线。

3．解　如图3所示，作辅助线$DE \parallel BC$，且使$AB = DE$。因为

$$AD = BC, \ \angle BDE = \angle ABC = 40°,$$

所以

$$\triangle ABC \cong \triangle EDA (SAS).$$

又因为$AE = AC$，$\angle DAE = 40°$，所以$\angle EAC = 60°$，$\triangle AEC$是等边三角形。由此有

$$EC = DE, \quad \angle DEC = 160°.$$

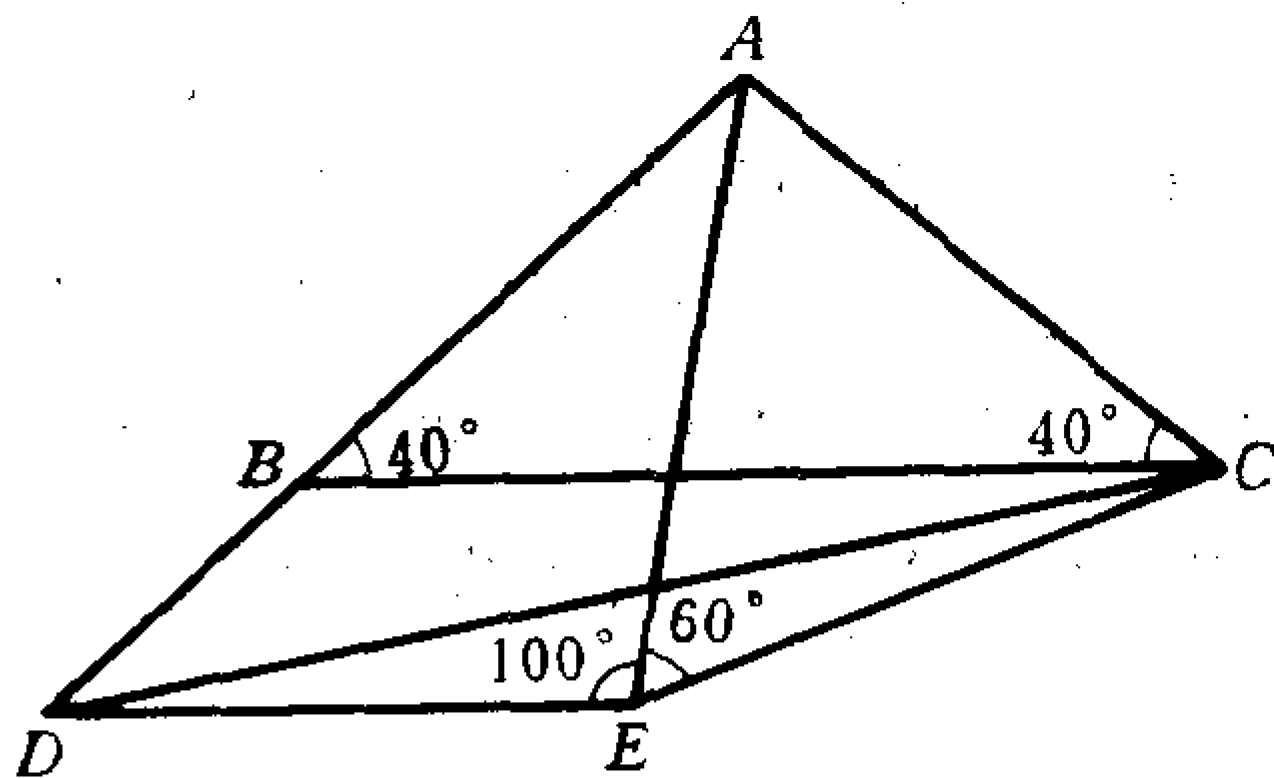


图 3

考虑$\triangle CED$，它是一个底角为$10°$的等腰三角形，所以

$$\angle BCD = 10°.$$

4．构造的证明　如图4，作一个适当大小的$\triangle ABC$，使它的三个内角分别为$\angle A = 132°$，$\angle B = 36°$，$\angle C = 12°$，$\angle C$的外角平分线与BA的延长线交于D；$\angle A$的外角平分线与CB的延长线相交于E。因为$\angle ACD = 84°$，$\angle CDA = 48°$，$\angle CAD = 48° = \angle CDA$，所以

$$CD = CA.$$

又因为$\angle BAE = 24°$，$\angle CEA = 12° = \angle ACE$，所以

$$AE = CA = CD.$$

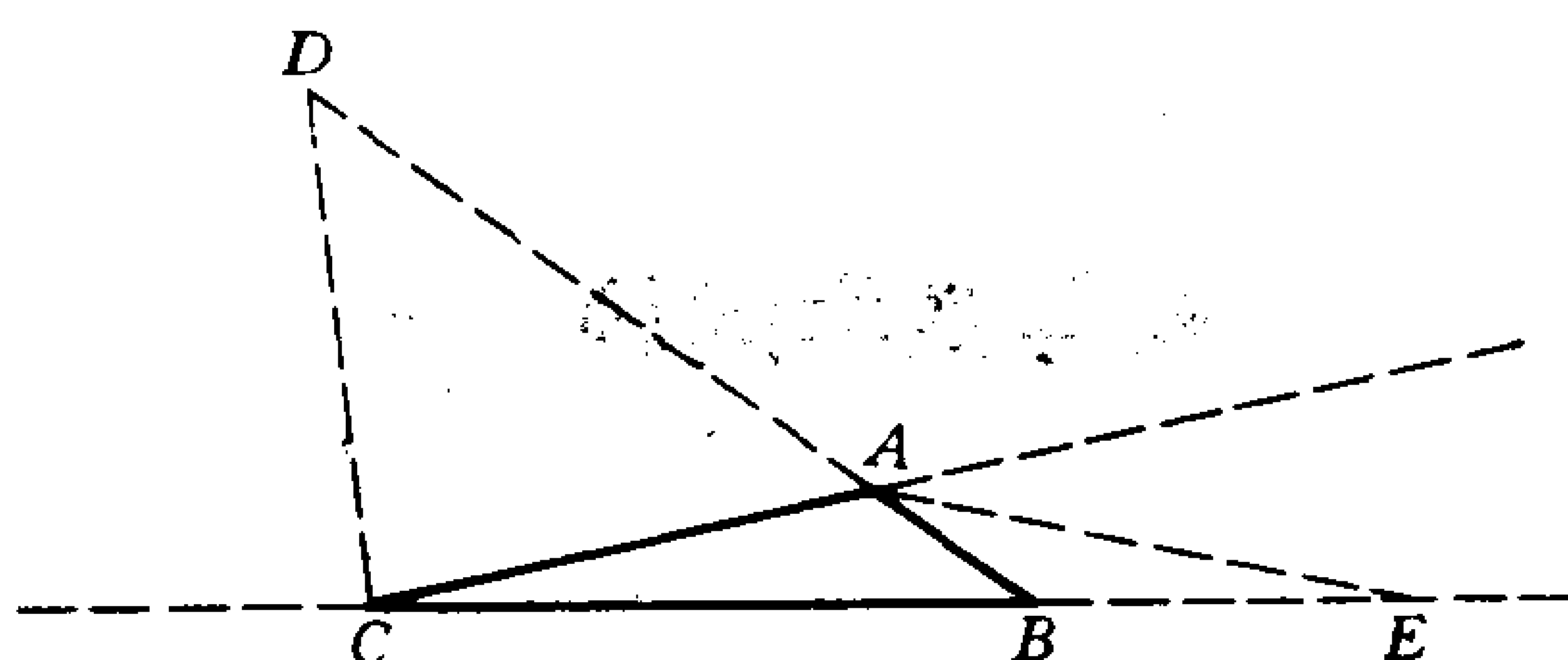


图 4

这说明：两条外角平分线CD与AE等长，且$\triangle ABC$不是等腰的。

5．解　由正五棱锥$O-ABCDE$的对称性知：若$\angle AOB=60°$，则$\angle BOC=60°$，且$AO=BO=CO=AB=BC$。这样，

$$\triangle AOC\cong\triangle ABC\ (SSS).$$

所以

$$\angle AOC=\angle ABC=108°.$$

（张思明提供，陈剑刚校）

初等数学问题[①]（4）

1．将$\frac{1}{1992}$分拆成两个单位分数之和，如

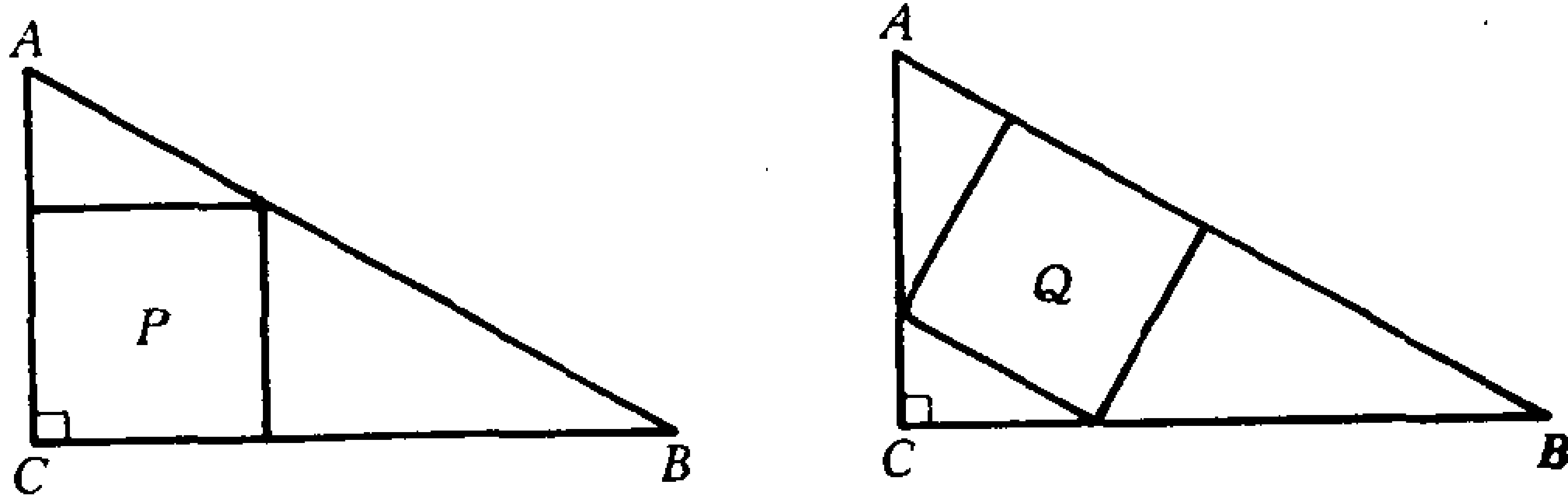
$$\frac{1}{1992}=\frac{1}{3984}+\frac{1}{3984},\ \frac{1}{1992}=\frac{1}{5976}+\frac{1}{2988},\ \cdots.$$

求所有不同的分拆数目，又其中满足分拆出的两个单位分数的分母都是四位整数的分拆又有多少？

2．$N_1=1993^{1993}$，将N_1乘开后得到一个很大的正整数，将组成这个整数的各位数字相加得到N_2，再将组成N_2的各位数字相加得到N_3，再将组成N_3的各位数字相加得到N_4，求N_4的值。

3．通过正方体的至少三条棱的中点的平面有多少个？

4．直角三角形ABC中，$\angle C=90°$，已知图中正方形P



（第4题图）

① 这个专栏是由北京大学附中陈剑刚主持下编写的，每期都由具有丰富的中学数学教学经验的教师给出若干有趣味性的数学问题，在下一册给出这些问题的解答。

和正方形Q的面积分别是961cm²和960cm²，求$AC+CB$的长。

5．已知

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\\ x-\dfrac{1}{2}, & x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

定义

$$f^{(1)}(x)=f(x),\quad f^{(2)}=f(f(x)),\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=f(f^{(n-1)}(x)),\quad n\in\boldsymbol{N}.$$

（1）计算$f^{(1993)}\left(\dfrac{7}{9}\right)=?$

（2）设 $A=\{x:\ f^{(12)}(x)=x, x\in[0,1]\}$，求证$A$中至少有28个元素。

（张思明选编，陈剑刚校）

（5）

主要目录